Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 96-101. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-96-101

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 51-8

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ВИТУС БЕРИНГ – 2015»

Г.М. Водинчар, О.К. Жданова, Л.Д. Островерхая, Р.И. Паровик, А.С. Пережогин, О.В. Шереметьева, Т.П. Яковлева

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: kafmat@mail.ru

В статье приведены задачи олимпиады по математике «Витус Беринг – 2015» для старших школьников, которая проходила на базе Камчатского государственного университета в ноябре 2015 года.

Ключевые слова: олимпиадные задачи по математике для школьников

TEACHING MATERIALS

MSC 97A90

SOLUTIONS OF MATHEMATICAL OLYMPIAD «VITUS BERING – 2015»

G.M. Vodinchar, O.K. Zhdanova, L.D. Ostroverhaya, R.I. Parovik, A.S. Perezhogin, O.V. Sheremet'eva, T.P. Yakovleva

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: kafmat@mail.ru

We consider solutions of Mathematical Olympiad «Vitus Bering – 2015» for high school students. It was held at Kamchatka State University in November 2015.

Key words: Mathematical Olympiad for high school students

Введение

Предлагаемая вниманию читателей заметка выходит из русла основной тематики журнала «Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки», связанной с публикацией результатов оригинальных исследований физико-математического профиля. Она посвящена математической олимпиаде школьников старших классов «Витус Беринг – 2015», которая проводилась Камчатским государственным университетом имени Витуса Беринга в начале ноября 2015 года. Мы надеемся, что подобные олимпиады на физико-математическом факультете будут традиционно проводиться каждый учебный год.

Предметные, в частности – математические, олимпиады известны как прекрасное средство популяризации науки, с одной стороны, и как механизм отбора талантливых учащихся в вузы, с другой. Математические олимпиады школьников в нашей стране начали проводится в 30-е годы прошлого века и быстро завоевали популярность, а с 60-х годов стали традиционными для многих городов Советского Союза. Они проводятся на уровнях городов, регионов, страны, свои олимпиады проводят многие учебные заведения. Получила большое развитие и система подготовки учащихся к решению очень специфических по своему содержанию олимпиадных задач. Уровень вовлеченности лучших юных математиков и физиков страны в олимпиадное движение стал настолько высоким, что поступление в ряд ведущих вузов страны, например в знаменитый «Физтех», фактически стало возможно только через олимпиады.

Переход в последние годы к поступлению в вузы через систему Единого государственного экзамена увеличил заинтересованность вузов к проведению своих олимпиад. Это объяснимо – вузы хотят не просто брать неизвестных для них абитуриентов на основании формальных баллов ЕГЭ, но и осуществлять свой содержательный отбор в рамках действующих правил приема. Победители и призеры вузовских олимпиад получают дополнительные баллы к баллам ЕГЭ при поступлении в соответствующий вуз.

Математическая олимпиада «Витус Беринг – 2015» проводилась в один тур и включала в себя 6 задач различной сложности для школьников 9-11 классов. На выполнение заданий участникам олимпиады было выделено 3 часа. При подготовке олимпиадных заданий организаторы использовали некоторые типовые задания из сборника [1].

Далее приводятся задания этой олимпиады и их решения.

Задания олимпиады

1) (5 баллов) Найти b^b, если выполняются соотношения $a^b = 81$, $b^c = 2$, $a^c = 3$.

2) (5 баллов) Грузовой состав догоняет пассажирский поезд по параллельному пути. Скорость грузового состава составляет 105 км/ч, скорость пассажирского – 85 км/ч. Длина пассажирского состава равна 800 метров. Найдите длину грузового состава, если он обогнал пассажирский состав за 252 секунды. Ответ привести в метрах.

3) (5 баллов) Решить уравнение

$$(1-(2-(3-(\ldots(2013-(2014-(2015-x)))\ldots))))=1000.$$

4) (10 баллов) Дан равнобедренный треугольник MNK с основанием MK. Точка A принадлежит основанию MK. На боковых сторонах MN и NK отмечены точки B и C, так что $MN||AC$ и $NK||AB$. Найти отношение площадей треугольников ABC и MNK, если $AC:NC=4:7$.

5) (15 баллов) Найти площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости следующей системой

$$\begin{cases} \sqrt{2-x}+4\cdot x\geq 0, \\ -2+\sqrt{x}\leq y\leq 1+\sqrt{x} \end{cases}$$

6) (10 баллов) В течение четверти учитель математики ставил ученикам оценки $<<1>>$, $<<2>>$, $<<3>>$, $<<4>>$, $<<5>>$. Среднее арифметическое оценок Пети оказалось равно в точности $<<3{,}5>>$. Петя попросил заменить одну оценку $<<4>>$ парой оценок $<<3>>$ и $<<5>>$. Доказать, что средняя оценка Пети увеличилась.

Решения

1) Из условия задачи получаем, что значения $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Рассмотрим $a^b=81$, тогда $\log_3 a^b=4$, откуда $b\cdot\log_3 a=4$. Аналогично из $a^c=3$ следует $c\cdot\log_3 a=1$. Найдем отношение $\dfrac{b\cdot\log_3 a}{c\cdot\log_3 a}=\dfrac{4}{1}$, откуда $b=4c$.

Тогда, применяя условие $b^c=2$, получим искомое выражение $b^b=b^{4c}=(b^c)^4=(2)^4=16$.

Ответ: 16.

2) Скорость сближения грузового поезда с пассажирским составляет $(105-85)=20$ км/ч. Тогда со скоростью 20 км/ч будет пройдено расстояние равное сумме длин пассажирского и грузового поездов за 252 секунды.

Переведем все данные в одинаковые единицы измерения (метры и секунды): 20 км/ч $=\frac{50}{9}$ м/с.

Пусть l – длина грузового состава, тогда

$$\begin{aligned} l+800 &= \tfrac{50}{9}\cdot 252, \\ l+800 &= 1400. \end{aligned}$$

Откуда $l=600$ м.

Ответ: 600 м.

3) Раскроем скобки и в левой части уравнения получим знакочередующуюся последовательность
слагаемых

$$1-2+3-...+2013-2014+2015-x=1000.$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$\underbrace{(1+2015)}_{2016}+\underbrace{(-2-2014)}_{-2016}+\underbrace{(3+2013)}_{2016}+\ldots+\underbrace{(-1006-1010)}_{-2016}+\underbrace{(1007+1009)}_{2016}-1008-x=1000$$

и заметим, что выражений, равных 2016, будет 504, а выражений, равных (–2016), будет 503.

Следовательно, наше уравнение может быть преобразовано к виду

$$2016-1008-x=1000.$$

Откуда $x=8$.

Ответ: $x=8$.

4) Построим указанную фигуру. Чертеж приведен на рис. **??**.

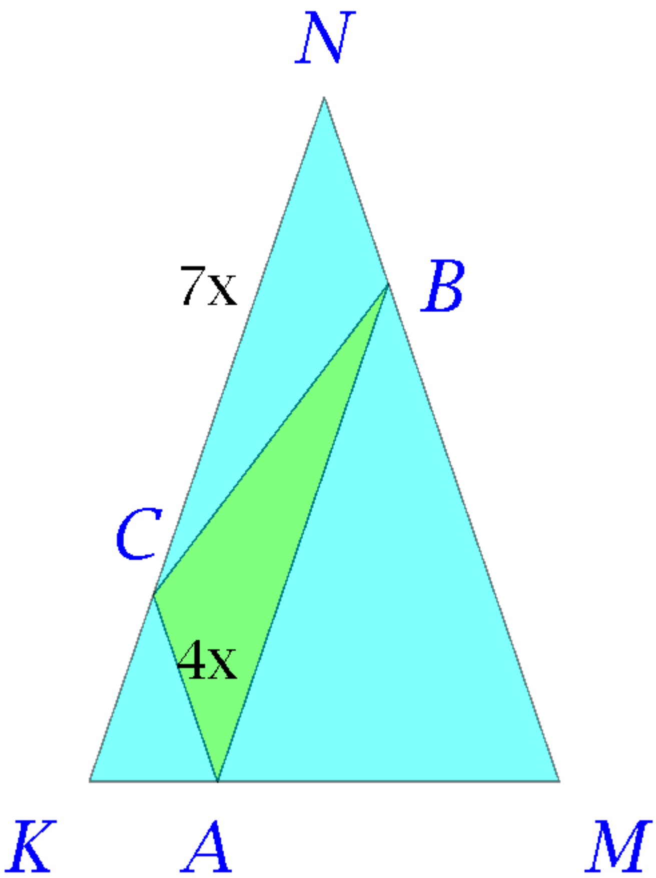

Рис. 1. Чертеж к задаче 4

$ACNB$ – параллелограмм, так как по условию задачи стороны параллельны.

Тогда $AC:AB=4:7$. Обозначим $\alpha=\angle CNB=\angle CAB$.

Найдем площадь треугольника ABC: $S_{ABC}=1/2\cdot AC\cdot AB\cdot\sin\alpha=1/2\cdot 4x\cdot 7x\cdot\sin\alpha=14\;x^2\sin\alpha$.

Треугольники KCA и KNM подобны по трем углам, следовательно, $KC = CA = 4x$ и $KN = KC + CN = 4x + 7x = 11x$.

Так как треугольник равнобедренный, то $S_{MNK} = 1/2 \cdot KN^2 \cdot \sin\alpha = 1/2 \cdot (11x)^2 \sin\alpha = 60,5\ x^2 \sin\alpha$.

Тогда требуемое отношение равно $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \dfrac{14\ x^2 \sin\alpha}{60,5\ x^2 \sin\alpha} = \dfrac{28}{121}$

Ответ: $\dfrac{28}{121}$.

5) Построим заданную область, обозначим D, на координатной плоскости.

Первое неравенство даёт ограничение на переменную x: $2 - x \geq 0$, откуда $x \in (-\infty, 2]$, а из второго неравенства $x \in [0, \infty)$. Следовательно, $x \in [0, 2]$.

Первое неравенство $\sqrt{2-x} + 4x \geq 0$ выполняется при всех $x \in [0, 2]$, что на координатной плоскости будет изображаться полосой, параллельной оси Oy. Второе неравенство определяет область между графиками функций $y_1 = \sqrt{x} + 1$ и $y_2 = \sqrt{x} - 2$, где график функции y_2 может быть получен из графика функции y_1 параллельным переносом вдоль оси Oy на три единицы вниз (рис. 2).

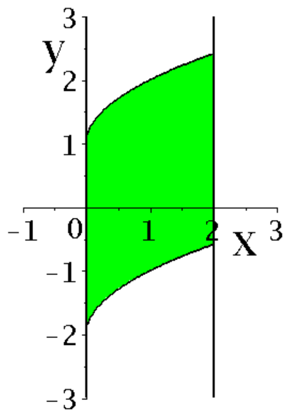

Рис. 2. Чертеж к задаче 5

Заметим, что область D равновелика прямоугольнику со сторонами 2 и 3. Для этого достаточно выполнить разрез области D, например, по линии $y = 1$ и верхнюю часть перенести вдоль оси Oy на три единицы вниз.

Отсюда площадь области D будет равна $S = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

6) Пусть общее количество оценок Пети за четверть равно n, а сумма оценок без одной «4» равна S.

Тогда средняя оценка будет $\dfrac{S+4}{n} = 3,5$, откуда $S = 3,5n - 4$.

Замена одной оценки «4» на две оценки, «3» и «5», увеличивает количество оценок на единицу и дает новую среднюю оценку $\dfrac{S+3+5}{n+1} = \dfrac{S+8}{n+1}$.

Рассмотрим разность новой и старой оценок

$$\frac{S+8}{n+1}-\frac{S+4}{n}=\frac{4n-4-S}{n(n+1)}=\frac{4n-4-3,5n+4}{n(n+1)}\frac{0,5n}{n(n+1)}.$$

Для всех натуральных n разность $\dfrac{0,5n}{n(n+1)}>0$. Следовательно, средняя оценка Пети увеличилась после замены.

Заключение

Проведенная в ноябре 2015 года на физико-математическом факультете Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга математическая олимпиада преследовала, в основном, профориентационные цели и была ориентирована на потенциальных абитуриентов. Победитель, призеры и участники олимпиады в случае поступления в этот университет получают дополнительные баллы к балам ЕГЭ по профильной математике.

Авторы надеются, что представленные задачи и их решения дадут возможность школьникам старших классов ознакомиться с уровнем и тематикой олимпиадных заданий, а преподаватели математики смогут использовать их для подготовки школьников к олимпиаде по математике.

Библиографический список

1. 34-й Турнир имени М. В. Ломоносова 25 сентября 2011 года. Задания. Решения. Комментарии. М.: МЦНМО, 2013. 197 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 19.11.2015