Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 61-66. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-61-66

УДК 517.9

ТЕСТ ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Г.М. Водинчар, Д.С. Нощенко, А.С. Пережогин

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: d72156@gmail.com

Рассматривается одно из малоразмерных приближений системы магнитной гидродинамики, с помощью которой описываются магнитные поля космических объектов. Для исследования аналитических свойств нелинейной системы применяется тест Пенлеве. В упрощенном представлении системы магнитной гидродинамики установлены значения коэффициентов, при которых выполняется необходимое условие наличия свойства Пенлеве.

Ключевые слова: метод Ковалевской-Гамбье, тест Пенлеве.

MSC 34A34

PAINLEVÉ TEST OF A MAGNETOHYDRODYNAMICS SYSTEM

G.M. Vodinchar, D.S. Noshenko, A.S. Perezhogin

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS

E-mail: d72156@gmail.com

One approximation of magnetohydrodynamics equations, which describe the cosmic object's magnetic field, is considered. The analytic properties of a nonlinear system are investigated by Painlevé test. Values of the coefficients in a simplified magnetohydrodynamics system are calculated for the necessary condition of Painlevé property.

Key words: Painleve test, Kovalevski-Gambier method.

Введение

Существование крупномасштабных магнитных полей планет, звезд и галактик успешно объясняется действием механизма динамо [1]. Математическое изучение работы этого механизма сводится к решению уравнений магнитной гидродинамики. Нелинейность и принципиальная трехмерность (ввиду известных антидинамо-теорем) этих уравнений делает невозможным их аналитическое решение.

Огромные значения числа Рейнольдса для космических динамо-систем при прямом численном моделировании требуют такого пространственного разрешения, а значит и числа узлов разностной сетки, которые недоступны сейчас и в обозримом будушем даже лучшим суперкомпьютерам [2].

В связи с эти интенсивно исследуются различные упрощенные модели, сохраняющие качественно основные черты динамо-механизма.

Помимо вопроса о воспроизведении этими моделями основных черт динамо-систем довольно интересным является и вопрос об аналитических свойствах их решений. В настоящей работе исследуется именно один из таких вопросов для маломерной аппроксимации уравнений динамо – условие прохождения этой системой теста Пенлеве.

Сначала схематично рассмотрим вывод системы из уравнений динамо.

Процесс генерации среднего магнитного поля турбулентными течениями проводящей вязкой несжимаемой жидкости с учетом α-эффекта во вращающейся системе координат описывается следующими уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \mathbf{v} + \mathrm{R}\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v} = \mathrm{Pm}\Delta\mathbf{v} - \nabla p - \mathrm{E}^{-1}\mathrm{Pm}\left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}\right) + \mathrm{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B},\\
&\partial_t \mathbf{B} = \mathrm{R_m}\mathrm{rot}\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) + \mathrm{R}_\alpha \mathrm{rot}\left(\alpha\mathbf{B}\right) + \triangle\mathbf{B},\\
&\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,\\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – средняя (крупномасштабная) скорость, $\mathbf{B}$ – среднее (крупномасштабное) магнитное поле, p – давление, $\mathbf{f}$ – массовая плотность внешних сил, α – тензор α-эффекта, R – число Рейнольдса, $\mathrm{R_m}$ – магнитное число Рейнольдса, E – число Экмана, Pm – магнитное число Прандтля, R_α – амплитуда α-эффекта, $\mathbf{e}_z$ – орт оси вращения.

Мы будем считать, что все рассматриваемые поля аксиально симметричны относительно оси вращения.

Бездивергентность полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ делает возможным их представление в виде суммы тороидальных и полоидальных составляющих.

Мы будем рассматривать случай выделения самых крупномасштабных структур, когда тороидальные и полоидальные компоненты скорости и магнитного поля можно представить в виде произведения стационарных полей на зависящие от времени амплитуды:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} = x_1(t)\mathbf{v}^T\left(\mathbf{r}\right) + x_2(t)\mathbf{v}^P\left(\mathbf{r}\right),\\
&\mathbf{B} = y_1(t)\mathbf{B}^T\left(\mathbf{r}\right) + y_2(t)\mathbf{B}^P\left(\mathbf{r}\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Подстановка разложений (2) в уравнения (1) и применение стандартной галеркинской процедуры приводит к системе уравнений для амплитуд [3]:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \mathrm{R}A_{112}x_1x_2 + \mathrm{E}^{-1}\mathrm{Pm}P_{12}x_2 + F_1 + L_{112}y_1y_2 - \mu_1 x_1,\\
\frac{dx_2}{dt} &= \mathrm{R}A_{211}x_1^2 + \mathrm{E}^{-1}\mathrm{Pm}P_{21}x_1 + F_2 + L_{211}y_1^2 + L_{222}y_2^2 - \mu_2 x_2,\\
\frac{dy_1}{dt} &= \mathrm{R_m}W_{112}x_1y_2 + \mathrm{R_m}W_{121}x_2y_1 + \mathrm{R}_\alpha W_{1\alpha 2}y_2 - \eta_1 y_1,\\
\frac{dy_2}{dt} &= \mathrm{R_m}W_{222}x_2y_2 + \mathrm{R}_\alpha W_{2\alpha 1}y_1 - \eta_2 y_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При записи этой системы учтено, что в аксиально симметричном случае векторные линии любого полоидального поля лежат в плоскостях, проходящих через ось вращения, а линии любого тороидального поля им перпендикулярны. Большими буквами с нижними индексами обозначены постоянные коэффициенты, возникающие в результате применения метода Галеркина, μ_i и η_i определяют скорости диссипации мод скорости и магнитного поля из разложения (2). При этом всегда $P_{12} = -P_{21}$.

Кроме того, мы будем полагать, что выполнены следующие соотношения $A_{112} = -A_{211}$, $L_{112} = -W_{112}$, $L_{211} = -W_{121}$, $L_{222} = -W_{222}$. Эти соотношения возникают из следующих соображений. Известно, что в бездиссипативном пределе трехмерные уравнения магнитной гидродинамики удовлетворяют трем законам сохранения – сохранению полной энергии, сохранению перекрестной спиральности, сохранению магнитной спиральности [2]. Если потребовать выполнения аналога закона сохранения полной энергии в нашей системе в виде $x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2 = const$, то возникнет необходимость именно в таких связях между коэффициентами. Также, для простоты, мы полагаем, что скорости диссипации тороидальных и полоидальных мод совпадают, откуда $\mu_1 = \mu_2$, $\eta_1 = \eta_2$.

Примем также, что $F_1 = 0$. Физически это означает, что в динамо-системе нет внешнего источника тороидального движения. Тороидальная компонента скорости возникает только за счет кориолисова сноса полоидальной составляющей скорости, обладающей внешним источником F_2.

Система (3) является одной из возможных простейших моделей некинематического динамо. Далее в работе исследуются некоторые ее аналитические свойства.

Упрощенная динамическая система

Упростим динамическую систему (3), наложив (уже просто формально, а не из физических соображений) дополнительные ограничения, приняв следующие равенства и вводя переобозначения: $L_{222} = L_{211} = W_{121} = W_{222} = F_1 = 0$, $F_2 = M$, $R_\alpha W_{2\alpha 1} = R_\alpha W_{1\alpha 2} = \alpha$, $P_{12} = K$, $P_{21} = -K$, $x_1 = u_2$, $x_2 = u_1$, $y_1 = u_3$, $y_2 = u_4$.

Для упрощенной системы найдем значения параметров, при которых она проходит тест Пенелеве. В этом случае решение системы представимо в виде ряда Лорана со свободными произвольными коэффициентами. Реализуем метод Ковалевской-Гамбье [4].

Основные этапы метода:

1) Выполним подстановку $u(x) = u_0 x^p$. Определим значение p старшей степени, чтобы уравнять соответствующие слагаемые.

2) После этого для каждого индекса j, начиная с $j = 0$, вычислим коэффициенты разложения $u(x) = u_j x^{p+j}$. Для каждого индекса j будем получать систему линейных алгебраических уравнений. Если удается однозначно разрешить системы для каждого индекса j, то получим однозначное представление решения в виде ряда Лорана. Для определение индексов j, при которых система является переопределенной, необходимо вычислить индексы Фукса.

3) Если хотя бы при одном индексе j система алгебраических уравнений является неразрешима, то тогда система дифференциальных уравнений не проходит тест Пенлеве. Если же все системы алгебраических уравнений, определяемые индексами Фукса, являются совместными, то система проходит тест Пенлеве.

Упрощенная динамическая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = -\lambda u_1(x) + Ku_2(x) - Lu_3(x)u_4(x) \\ \dfrac{du_2}{dx} = -\lambda u_2(x) - Ku_1(x) + M \\ \dfrac{du_3}{dx} = Lu_1(x)u_4(x) + \alpha u_4(x) - u_3(x) \\ \dfrac{du_4}{dx} = -\alpha u_3(x) - u_4(x) \end{cases} \tag{4}$$

где M, L, K, λ – параметры системы.

1 этап. Подставим разложение $u_i(x) = u_{i,0}x^{p_i}, i = 1..4$ в систему уравнений (4). Система уравнений для ведущих слагаемых из разложения приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} p_1 - 1 = p_3 + p_4 \\ p_2 - 1 = p_1 \\ p_3 - 1 = p_1 + p_4 \\ p_4 - 1 = p_3 \end{cases} \tag{5}$$

Решение линейной системы (5) дает только целые коэффициенты для переменных p_i

$$p_1 = -2, p_2 = -1, p_3 = -2, p_4 = -1 \tag{6}$$

Найдем коэффициенты $u_{i,0}$ из системы при старших степенях разложения при заданных значения p_i, $i = 1..4$:

$p_1x_1 = -Lx_3x_4, p_2x_2 = -Kx_1, p_3x_3 = Lx_1x_4, p_4x_4 = -\alpha x_3$

Таким образом мы имеем несколько наборов решений: одно тривиальное решение и 4 ненулевых решения.

$$u_{1,0} = \frac{-2}{L\alpha}, u_{2,0} = \frac{-2K}{L\alpha}, u_{3,0} = \pm\frac{2I}{L\alpha}, u_{4,0} = \pm\frac{\pm 2I}{L} \tag{7}$$

где I – мнимая единица.

Рассмотрим первый набор коэффициентов $u_{3,0} = \dfrac{2I}{L\alpha}$, $u_{4,0} = -\dfrac{2I}{L}$. Коэффициенты $u_{3,0}$, $u_{4,0}$ имеют различные знаки. Вычислим индексы Фукса из определителя следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} \alpha(j-2) & 0 & -2I\alpha & 2I \\ K & j-1 & 0 & 0 \\ 2I\alpha & 0 & \alpha(j-2) & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & j-1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Получаем иррациональные значения индексов Фукса

$$0,1,5/2-1/2\sqrt{17},5/2+1/2\sqrt{17} \tag{9}$$

В связи с этим необходимо выбирать $u_{3,0}$, $u_{4,0}$ только с одинаковыми знаками, чтобы можно было продолжить анализ системы. Если $u_{3,0}$ и $u_{4,0}$ имеют одинаковый знак, тогда матрица для вычисления индекса Фуксов принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \alpha j-2\alpha & 0 & 2I\alpha & 2I \\ K & j-1 & 0 & 0 \\ -2I\alpha & 0 & \alpha j-2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & j-1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Приравнивания определитель матрицы (10) к нулю, получаем индексы Фукса $-1, 1, 2, 4$.

Для каждого индекса Фукса вычисляем инварианты динамической системы:

$$Q_1 = -\frac{8I(\lambda-1)}{3L}$$

$$Q_2 = \frac{IK^2}{L} + \frac{I\left(17\lambda^2-4\lambda-4\right)}{9L}$$

$$Q_4 = \frac{(\lambda-1)}{3}\Bigg(-\frac{33\alpha^2\lambda+12\lambda^3+27K^2-15\alpha^2+43\lambda^2-56\lambda+16}{3L\alpha}+$$
$$+2\,\frac{(7\lambda-4)(u_{2,2}-\Delta)+\left(3K^2+7\lambda^2-4\lambda\right)u_{2,1}}{K}+\Bigg)-\frac{\alpha K^2}{L}-\frac{\alpha}{L}-KM$$

Полагая $Q_1 = Q_2 = Q_4 = 0$, получаем следующие значения для параметров системы $\lambda = 1$, $K = \pm I$, $M = 0$. Система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\frac{d}{dx}u_1(x) = -u_1(x) + Iu_2(x) - Lu_3(x)u_4(x) \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}u_2(x) = -u_2(x) - Iu_1(x) \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}u_3(x) = Lu_1(x)u_4(x) + \alpha u_4(x) - u_3(x) \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}u_4(x) = -\alpha u_3(x) - u_4(x) \tag{14}$$

Таким образом, мы получаем однозначное представление решения в виде ряда Лорана. Следовательно, для таких параметров λ, K, M выпишем явное разложение в ряд:

$$u_1 = 2\frac{\left(x^{-1} - x^{-2}\right)}{L\alpha} + I\left(1-2x\right)\left(u_{2,1} + u_{2,2}\right) - \frac{2\left(\alpha^2+1\right)}{L\alpha}x + u_{1,4}x^2 + \ldots \quad (15)$$

$$u_2 = \frac{-2I}{L\alpha x} + \left(1-x^2\right)u_{2,1} + \left(x - 3/2x^2\right)u_{2,2} + \frac{I\left(\alpha^2+1\right)}{L\alpha}x^2 + u_{2,4}x^3 + \ldots \quad (16)$$

$$u_3 = \frac{2I\left(x^{-2} - x^{-1}\right)}{L\alpha} + \left(1-2x\right)u_{2,2} + \left(\frac{I\left(\alpha^2+1\right)}{L\alpha} - u_{2,1}\right)\left(x-1\right) + u_{3,4}x^2 + \ldots \quad (17)$$

$$u_4 = \frac{2I}{Lx} + \alpha\left(x^2 - x\right)u_{2,1} + \alpha\left(3/2x^2 - x\right)u_{2,2} + \frac{I\left(\alpha^2+1\right)\left(x - x^2\right)}{L} + u_{4,4}x^3 + \ldots \quad (18)$$

Заключение

В упрощенном представлении динамическая система проходит тест Пенлеве с найденным набором значений для коэффициентов. Прохождение теста Пенлеве не является достаточным условием для наличия свойства Пенлеве. Найденные условия на коэффициенты упрощенной системы могут быть использованы для сопоставления с аналитическими и численными исследованиями решений данной системы.

Библиографический список

1. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М.-Ижевск: РХД, 2006. 384 с.

2. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. М.-Ижевск: РХД, 2010. 332 с.

3. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 2010. 368 с.

4. Конт Р.М., Мюзетт М. Метод Пенлеве и его приложения. М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 340 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.11.2015