Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 17-21. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-17-21

УДК 517.95

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ В ПОЛУПОЛОСЕ

Ф.М. Лосанова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: losanovaf@gmail.com

В данной работе строится решение нелокальной краевой задачи с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, нелокальная задача, условие Самарского, функция типа Райта

MSC 35K57

PROBLEM WITH CONDITIONS SAMARA FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION IN THE HALF

F.M. Losanova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: losanovaf@gmail.com

In this paper, we construct a solution of a nonlocal boundary value problem with the condition Samarskii for a fractional diffusion equation in the half.

Key words: fractional diffusion equation, nonlocal problem, Samarskii condition, type function Wright

Введение

Уравнения дробного порядка исследуются в последнее время весьма интенсивно. Это связано с многочисленными приложениями дробного исчисления в физике, механике, биологии и т.д.

Уравнения дробного порядка выступают основой математических моделей различных физических процессов во фрактальных средах [1], [2].

Постановка задачи

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) - D^{\alpha}_{0y} u(x,\eta) = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$D^{\alpha}_{0y}u(x,\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x,\eta)d\eta}{(y-\eta)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x,y), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^n}{\partial y^n} D^{\alpha-n}_{0y} u(x,\eta), & n-1 < \alpha \le n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка α [1, с. 9], $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha \le 1$.

Краевые задачи с интегральными условиями для параболических уравнений, в том числе с дробной производной, исследовались в работах [3]-[6]. Уравнения вида (1) исследовались в работах [7], [8].

В данной работе строится решение нелокальной краевой задачи с условием Самарского для уравнения (1).

Решение $u(x,y)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω, если $y^{1-\alpha}u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}(x,y), D^{\alpha}_{0y}u(x,\eta) \in C(\Omega)$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям:*

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y} u(x,\eta) = \tau(x), \qquad 0 \le x < \infty, \tag{2}$$

$$\int_0^l u(x,y)dx = \psi(y), \qquad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\tau(x), \psi(y)$ – заданные непрерывные функции.

Для нахождения решения задачи (1)-(3) воспользуемся представлением решения задачи с условиями (2), $u(0,y) = \varphi(y)$ для уравнения (1) [4]

$$u(x,y) = \int_0^y G_{\xi}(x,y,0,\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_0^{\infty} G(x,y,\xi,0)\tau(\xi)d\xi - \int_0^y\int_0^{\infty} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{4}$$

где $G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\delta-1}}{2}\left[e^{1,\delta}_{1,\delta}\left(-\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{\delta}}\right) - e^{1,\delta}_{1,\delta}\left(-\frac{|x+\xi|}{(y-\eta)^{\delta}}\right)\right], e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Райта [7, с. 22].

Для определения неизвестной $\varphi(y)$ удовлетворим функцию (4) условию (3). Тогда, после элементарных преобразований, будем иметь

$$\int_0^y \varphi(\eta)\int_0^l G_\xi(x,y,0,\eta)dxd\eta+\int_0^\infty \tau(\xi)\int_0^l G(x,y,\xi,0)dxd\xi-$$

$$-\int_0^y\int_0^\infty f(\xi,\eta)\int_0^l G(x,y,\xi,\eta)dxd\xi d\eta=\psi(y). \qquad (5)$$

Используя формулу дифференцирования функции типа Райта имеем, что [8, с. 26] $\frac{d^n}{dx^n}x^{\mu-1}e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(cx^\alpha)=x^{\mu-n-1}e^{\mu-n,\delta}_{\alpha,\beta}(cx^\alpha)$ для любых $\mu\in\mathbb{R}$

$$G_\xi(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\delta-1}}{2}\Big[\frac{sign(x-\xi)}{|x-\xi|}e^{0,\delta}_{1,\delta}\Big(-\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^\delta}\Big)+\frac{sign(x+\xi)}{|x+\xi|}e^{0,\delta}_{1,\delta}\Big(-\frac{|x+\xi|}{(y-\eta)^\delta}\Big)\Big].$$

Отсюда при $\xi=0$, учитывая формулу автотрансформации для функции типа Райта [8, с. 24] $ze^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=e^{\mu-\alpha,\delta+\beta}_{\alpha,\beta}(z)-\frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)}$ имеем

$$G_\xi(x,y,0,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\delta-1}}{x}e^{0,\delta}_{1,\delta}\Big(-\frac{|x|}{(y-\eta)^\delta}\Big)=-\frac{1}{y-\eta}e^{1,0}_{1,\delta}\Big(-\frac{x}{(y-\eta)^\delta}\Big). \qquad (6)$$

Вычислим внутренний интеграл в первом слагаемом равенства (5)

$$\int_0^l G_\xi(x,y,0,\eta)dx=-\int_0^l\frac{1}{y-\eta}e^{1,0}_{1,\delta}\Big(-\frac{x}{(y-\eta)^\delta}\Big)dx=\Big[\frac{x}{y-\eta}e^{2,0}_{1,\delta}\Big(-\frac{x}{(y-\eta)^\delta}\Big)\Big]_{x=0}^{x=l}=$$

$$=\frac{l}{y-\eta}e^{2,0}_{1,\delta}\Big(-\frac{l}{(y-\eta)^\delta}\Big). \qquad (7)$$

Используя формулу автотрансформации для функции типа Райта еще раз из соотношения (7) окончательно получим

$$\int_0^l G_\xi(x,y,0,\eta)dx=\frac{(y-\eta)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}-(y-\eta)^{\delta-1}e^{1,\delta}_{1,\delta}\Big(-\frac{l}{(y-\eta)^\delta}\Big). \qquad (8)$$

Подставив соотношение (8) в формулу (5), будем иметь

$$\int_0^y \varphi(\eta)\Big[\frac{(y-\eta)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}-(y-\eta)^{\delta-1}e^{1,\delta}_{1,\delta}\Big(-\frac{l}{(y-\eta)^\delta}\Big)\Big]d\eta=F(y), \qquad (9)$$

где

$$F(y)=\psi(y)-\int_0^\infty\tau(\xi)\int_0^l G(x,y,\xi,0)dxd\xi+\int_0^y\int_0^\infty f(\xi,\eta)\int_0^l G(x,y,\xi,\eta)dxd\xi d\eta.$$

В силу определения дробного интегродифференцирования, равенство (9) перепишем в виде

$$D_{0y}^{-\delta}\varphi(y)-\int\limits_0^y\varphi(\eta)(y-\eta)^{\delta-1}e_{1,\delta}^{1,\delta}\Big(-\frac{l}{(y-\eta)^{\delta}}\Big)d\eta=F(y). \tag{10}$$

С учетом обозначений $\omega_\mu(y)=y^{\mu-1}e_{1,\delta}^{1,\mu}(-\frac{l}{y^\delta})$, $(f*h)(y)=\int\limits_0^y f(y-\eta)h(\eta)d\eta$ и

$$g(y)=D_{0y}^{-\delta}\varphi(y) \tag{11}$$

соотношение (10) перепишем в виде

$$g(y)-(\varphi*\omega_\delta)(y)=F(y). \tag{12}$$

Применив формулу $\omega_{\mu-\varepsilon}(y)=D_{0y}^{\varepsilon}\omega_\mu(y)$ из равенства (12) получим

$$g(y)-\varphi*D_{0y}^{-\delta}\omega_0(y)=F(y). \tag{13}$$

Учитывая свойство свертки Лапласа $f*D_{0y}^{-\delta}g(y)=g*D_{0y}^{-\delta}f(y)$ из формулы (13) получим

$$g(y)-(g*\omega_0)(y)=F(y). \tag{14}$$

Соотношение (14) есть интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода. Решение уравнения (14) представимо в виде

$$g(y)=F(y)+(F*R)(y), \tag{15}$$

где

$$R(y)=\sum_{n=0}^{\infty}y^{\delta(n+1)-1}e_{1,\delta}^{1,\delta(n+1)}\Big(-\frac{l(n+1)}{y^\delta}\Big).$$

Из обозначения (11) в силу равенства (15) имеем

$$\varphi(y)=D_{0y}^{\delta}g(y)$$

или

$$\varphi(y)=D_{0y}^{\delta}[F(y)+(F*R)(y)]. \tag{16}$$

Теорема. *Пусть* $\tau(x)\in C[0,\infty[, y^{1-\alpha}\psi(y)\in C[0,T], y^{1-\alpha}f(x,y)\in C(\overline{\Omega}), f(x,y)$ *удовлетворяет условию Гельдера по переменной x. Тогда решение задачи (2), (3) для уравнения (1) представимо в виде (4), где* $\varphi(y)$ *определяется соотношением (16).*

Библиографический список

1. Нахушев А.М.Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272с.

2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. - Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

3. Лосанова Ф.М. Нелокальная краевая задача с оператором Капуто// Изв. ВУЗов Северо-Кавказский регион. 2010. № 5 (159). С. 22-25.

4. Лосанова Ф.М. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения с оператором Капуто // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики». 2014. С. 80-81.

5. Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // "Понтрягинские чтения - XIII". Сб. материалов.- Воронеж, ВГУ, 2002. С. 37.

6. Нахушева З.А. 1-я и 2-я краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка// Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 1982-1992.

7. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.

8. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 2005. 199 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 19.09.2015