

УДК 517.953

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.В. Юлдашева

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан,
г. Ташкент, ул. ВУЗ городок

E-mail: yuasv86@mail.ru

В статье рассматривается некорректная задача для уравнения высокого четного порядка. Доказывается однозначная разрешимость при дополнительных условиях и условиях на область.

Ключевые слова: уравнения в частных производных высокого порядка, некорректная задача, метод разделения переменных, цепные дроби.

© Юлдашева А.В., 2014

MSC 35C05

ON ONE PROBLE FOR HIGHER-ORDER EQUATION

A.V. Yuldasheva

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan, Tashkent
c., VUZ gorodok st.

E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper not well posed problem for the even-order equation is studied. The stability of the problem is restored by additional conditions and conditions to domain.

Key words: partial differential equations of higher order, not well posed problem, method of separation of variables, simple continued fractions.

© Yuldasheva A.V., 2014

Постановка задачи

В настоящей работе для уравнения

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad k = 2n + 1, n \in N, \quad (1)$$

в области $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ рассматривается задача со следующими условиями:

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(0, t) = \frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(\pi, t) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2)$$

$$u(\alpha\pi, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (3)$$

где α некоторая постоянная из $(0, 1)$ и $f(t)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Мы покажем, что если α иррациональное число, то в классе $u \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$ справедлива теорема единственности решения задачи (1)-(3).

Отметим, что данная задача некорректна, так как малое изменение функции $f(t)$ в норме $C^s (s \in N)$ может вызвать сколь угодно большое изменение решения u в норме L_2 .

Регуляризовать эту задачу можно с помощью дополнительного условия, к примеру с помощью задания априорной оценки

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2 dt dx \leq E^2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (4)$$

где E заданная постоянная.

О корректности задачи

Предположим, что существует функция $u \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$ удовлетворяющая условиям (1)-(3), тогда u можно представить в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left(a_n \cos n^k t + b_n \sin n^k t \right), \quad (5)$$

а из этого представления следует, что функция $f(t)$ должна иметь вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha\pi \left(a_n \cos n^k t + b_n \sin n^k t \right). \quad (6)$$

Теорема 1. Если α иррациональное число, то задача (1)-(3) имеет не более одного решения $u \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$.

Доказательство. Действительно, если в (6) $f \equiv 0$, тогда $a_n = b_n = 0$. Следовательно, и $u \equiv 0$. $\square$

Замечание. Если α рациональное число, то единственности нет.

Например, пусть q некоторое натуральное число, тогда функция $u(x, t) = \sin qx \cos q^k t$ удовлетворяет (1), (2) и

$$u\left(\frac{\pi}{q}, t\right) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что иррациональное число α имеет порядок Ω , если Ω - это верхняя граница чисел ω , удовлетворяющих неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \frac{1}{q^{1+\omega}},$$

для любых $\frac{p}{q} \in \mathcal{Q}$. Известно, что почти все числа α имеют порядок $\Omega = 1$ [3, ?].

Следующее утверждение связано с вопросом об устойчивости решения в зависимости от α и f . Например.

Теорема 2. Пусть α иррациональное число. Тогда существует последовательность 2π - периодических функций $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, равномерно стремящаяся к нулю и такая, что для функций $u_n \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$, удовлетворяющих (1), (2) и

$$u_n(\alpha\pi, t) = f_n(t), \quad (7)$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(D)} = +\infty. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n^k}} \sin n^k t,$$

тогда

$$u_n(x, t) = \left(\sqrt{n^k} \sin n\alpha\pi \right)^{-1} \sin n^k t \sin nx.$$

Известно, что [2] существует последовательность целых чисел p_n, q_n таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty, \quad \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

и тогда из следующей оценки следует утверждение теоремы

$$|\sin q_n \alpha \pi| = |\sin(q_n \alpha - p_n) \pi| < \frac{\pi}{q_n}.$$

Заметим, что для любого данного целого s существует иррациональное число α (например, порядка $s+2$) такое, что решение

$$u_n(x, t) = n^{-1-s} (\sin n\alpha\pi)^{-1} \sin n^k t \cdot \sin nx$$

задачи (1), (2) и $u_n(\alpha\pi, t) = n^{-1-s} \sin n^k t$ удовлетворяет следующей оценке

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(D)} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{C^s(D)} = 0,$$

из которой видно, что задача некорректна. $\square$

Сейчас, мы покажем, что задача также неустойчива относительно α .

Теорема 3. Пусть $p, q \in \mathbb{N}, p < q$ $\{\alpha_n\}$ последовательность иррациональных чисел сходящихся к $\frac{p}{q}$. И пусть $u_n \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$ решение задачи (1), (2) и $u_n(\alpha\pi, t) = \sin q^k t$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(D)} = +\infty.$$

Решение запишем в виде $u_n(x, t) = \frac{\sin q^k t \cdot \sin qx}{\sin q \alpha_n \pi}$, откуда очевидно утверждение теоремы.

Поэтому необходимо дополнительное условие

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2 dt dx \leq E^2.$$

Задача с ограниченным решением

Пусть α, ε, E некоторые положительные константы, причем $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть $f \in L_2(0, 2\pi)$. Обозначим через $\Gamma(\varepsilon, E)$ класс функций $u \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$ удовлетворяющих (1), (2) и

$$\|u(\alpha\pi, \cdot) - f\|_{L_2(0, 2\pi)} \leq \varepsilon, \quad (9)$$

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{L_2(D)} \leq E. \quad (10)$$

Условие (9) заменяет условие (3), а априорная оценка (10) необходима для корректности задачи.

Введем следующие обозначения

$$\|u\|^2 = \sup_{x \in [0, \pi]} \int_0^{2\pi} u^2(x, t) dt, \quad (11)$$

$$\Delta(\varepsilon, E) = \sup_{v, w \in \Gamma(\varepsilon, E)} \|v - w\|. \quad (12)$$

Теорема 4. Пусть α рациональное число, $\alpha = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$ и пусть

$$q^2 \leq 2 \frac{E}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Тогда

$$\Delta(\varepsilon, E) \leq 3 \frac{E}{q^k}. \quad (14)$$

Если же $q = \left\lceil \left(\frac{2E}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{k}} \right\rceil$, тогда

$$\Delta(\varepsilon, E) \leq 3\sqrt{E}\sqrt{\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть $v, w \in \Gamma(\varepsilon, E)$, тогда $u = v - w \in C_{x,t}^{2k,2}(D)$ удовлетворяет (1), (2) и

$$\|u(\alpha\pi, \cdot)\|_{L_2(0,2\pi)} \leq 2\varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{L_2(D)} \leq 2E. \quad (15)$$

В силу представления u в виде (5), перепишем условия (15) следующим образом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \sin^2 n \frac{p}{q} \pi \leq \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}, \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{8E^2}{\pi^2}, \quad (17)$$

откуда следует

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin^2 n \frac{p}{q} \pi + n^{2k} \frac{\varepsilon^2}{E^2} \right) (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{8\varepsilon^2}{\pi}. \quad (18)$$

Из (5) имеем

$$\|u\|^2 = \pi \max_{x \in [0, \pi]} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \sin^2 nx \leq \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Из (12) следует

$$\Delta^2(\varepsilon, E) \leq \pi \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) : a_n, b_n \right\},$$

удовлетворяющие (18).

Согласно правилу множителей Лагранжа, находим

$$\Delta^2(\varepsilon, E) \leq 8\varepsilon^2 \min(\sin^2 r \frac{p}{q} \pi + r^{2k} \frac{\varepsilon^2}{E^2})^{-1}, \quad r \in N. \quad (19)$$

Из (13) имеем

$$\sin^2 r \frac{p}{q} \pi + r^{2k} \frac{\varepsilon^2}{E^2} \geq \frac{\varepsilon^2}{E^2} q^{2k}, \quad 1 \leq r \leq q.$$

Подставляя эту оценку в (19) получим (14). Теорема доказана. $\square$

Предположим теперь, что α иррациональное число, разлагаемое в цепную дробь

$$\alpha = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}.$$

Теорема 5. $\alpha \in (0, 1)$ иррациональное число и пусть $\alpha_i \leq K_\alpha$,

$$\Delta(\varepsilon, E) \leq 3 \left(\frac{K_\alpha + 2}{2} \varepsilon E \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Доказательство. Для того, чтобы убедиться в справедливости данной оценки, заметим, что из теоремы 4 следует, что для $\Delta(\varepsilon, E)$ верна оценка (19), тогда из условия, что $\alpha_i \leq K_\alpha$ [3], получаем

$$\sin^2 r \alpha \pi \geq \frac{27}{4(K_\alpha + 2)^2 r^2}, \quad r \geq 1.$$

Тогда

$$\min_{r \in N} \left\{ \frac{27}{4(K_\alpha + 2)^2 r^2} + r^{2k} \frac{\varepsilon^2}{E^2} \right\} \geq \frac{\varepsilon}{E} \frac{\sqrt{27}}{(K_\alpha + 2)}.$$

Отсюда следует требуемая оценка

$$\Delta^2(\varepsilon, E) \leq 9\varepsilon E \left(\frac{K_\alpha + 2}{2} \right).$$

□

Библиографический список

1. Frosali G. Papi. On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1979. V.6. P. 719-728.
2. Юлдашева А.В. Об одной задаче для уравнения высокого порядка // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2012. № 5. С. 11-14.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Л.: ФМ, 1961. 112 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.10.2014