

УДК 517.23

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОТ ФУНКЦИИ ПО ДРУГОЙ ФУНКЦИИ

А.С. Нишонбоев

Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана,
ул. Мураббийлар, 19

E-mail: azizbek.nishoboev@mail.ru

Доказываются важные леммы для оператора дробного интегро-дифференцирования
от функции по другой функции.

Ключевые слова: функция Гаусса, функция Мейера, преобразование Меллина

© Нишонбоев А.С., 2014

MSC 34L40

CERTAIN PROPERTIES OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION OPERATOR OF FUNCTIONS IN OTHER FEATURES

A.S. Nishonboev

Fergana State University, 150100, Uzbekistan, Fergana c., Murabbiylar st., 19

E-mail: azizbek.nishoboev@mail.ru

Prove an important lemma for the operator of fractional integro-differentiation of functions
of other functions.

Key words: Gaussian function, the function Meyer, Mellin transform

© Nishonboev A.S., 2014

Примем обозначения

$$D_{a,g(x)}^l \phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_a^x [g(x) - g(t)]^{-l-1} \phi(t) g'(t) dt, & l < 0 \\ \phi(x), & l = 0 \\ \frac{d^{n+1}}{d[g(x)]^{n+1}} D_{0g(x)}^{l-(n+1)} \phi(x), & l > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$F_{0,g(x)} \begin{bmatrix} a & b \\ e & x \end{bmatrix} \phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_a^x [g(x) - g(t)]^{-l-1} F(a, b, c; \frac{g(x)-g(t)}{g(x)}) \phi(t) g'(t) dt, & l < 0 \\ \phi(x), & l = 0 \\ [g(x)]^b \frac{d^{n+1}}{d[g(x)]^{n+1}} [g(x)]^{-b} F_{0,g(x)} \begin{bmatrix} a+b+1, & b \\ l-n-1, & x \end{bmatrix} \phi(x), & l > 0 \end{cases} \quad (2)$$

где a, b и l – любые действительные числа; n – целая часть l ; $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $F[\dots]$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Имеет место

ЛЕММА 1. Пусть $\phi(x) \in L(0, 1)$, $l_1 + l_3 < 0$, $l_3 < 0$. Тогда почти всюду на $(0, 1)$ выполняется соотношение

$$D_{0x^2}^{l_1} D_{0x}^{l_3} \phi(x) = 2^{l_3} \cdot x^{l_3+1} F_{0x^2} \left[\begin{matrix} -\frac{1+l_3}{2}, & -l_1 - \frac{l_3}{2} \\ -l_1 - l_3, & x \end{matrix} \right] \frac{\phi(x)}{x}. \quad (3)$$

Здесь l_1, l_3 – заданные действительные числа;

Доказательство. Рассмотрим случай. Когда $l_1 < 0$, $l_3 < 0$.

В силу определения (1) имеем

$$D_{0x^2}^{l_1} D_{0x}^{l_3} \phi(x) = \frac{x^{-l_1}}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-l_1-1} dt^2 \int_0^t (t-y)^{-l_3-1} \phi(y) dy. \quad (4)$$

После некоторых преобразований из (4), получим

$$I = D_{0x^2}^{l_1} D_{0x}^{l_3} \phi(\sqrt{x}) = \frac{x^{-l_1}}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (x-t)^{-l_1-1} dt \int_0^t (\sqrt{t} - \sqrt{y})^{-l_3-1} \phi(\sqrt{y}) d\sqrt{y}. \quad (5)$$

Меняя порядок интегрирования, из (5) находим

$$I = \int_0^x \phi(y) d\sqrt{y} \int_y^x (x-t)^{-l_1-1} (\sqrt{t} - \sqrt{y})^{-l_3-1} dt, \quad (6)$$

Произведя замену $t = xz$ из (6), получим

$$I = \frac{x^{-l_1}}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (\sqrt{y})^{-l_3-1} \phi(y) K(\sigma) d\sqrt{y}, \quad (7)$$

где

$$K(\sigma) = \int_0^\infty K_1(\sqrt{\sigma z}) K_2(z) dz, \quad (8)$$

$$K_1(z) = (z-1)_+^{-l_3-1}, \quad K_2(z) = (1-z)_+^{-l_1-1}, \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{x}{y}, \quad z_+^l = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z^l, & z > 0 \end{cases}.$$

Для вычисления интеграла (8) воспользуемся преобразованием Меллина [1]

$$f*(s) = M\{f(x); s\} = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \quad (10)$$

Тогда учитывая соотношение [3]

$$M\left\{x^{\delta_1} \int_0^\infty \xi^{\delta_2} g_1(x\xi) g_2(\xi) d\xi; s\right\} = g_1^*(s + \delta_1) g_2^*(1 - \delta_1 + \delta_2 - s), \quad (11)$$

получим

$$M\{K(\sigma); s\} = K^*(s) K_1^*(s) K_2^*(1 - s). \quad (12)$$

Далее в силу формулы [3]

$$M\left\{(x-1)_+^{c-1}; s\right\} = \Gamma(c) \Gamma\left[\frac{1-c-s}{1-s}\right], \quad \text{Rec} > 0, \quad \text{Res} < 1 - \text{Rec}. \quad (13)$$

$$M\{f(x^p)\} = \frac{1}{p} f*\left(\frac{s}{p}\right), \quad p \neq 0, \quad (14)$$

$$M\left\{(1-x)_+^{c-1}; s\right\} = \Gamma(c) \Gamma\left[\frac{s}{s+c}\right], \quad \text{Rec} > 0, \quad \text{Res} > 0 \quad (15)$$

Находим

$$K_1*(s) = 2\Gamma(-l_3) \Gamma\left[\frac{1+l_3-2s}{1-2s}\right], \quad \text{Rel}_3 < 0, \quad 2\text{Res} < 1 + l_3, \quad (16)$$

и

$$K_2*(s) = \Gamma(-l_1) \Gamma\left[\frac{s}{s-l_1}\right], \quad \text{Rel}_1 < 0, \quad \text{Res} > 0, \quad (17)$$

Подставляя (16), (17) в (12) получим

$$K*(s) = 2\Gamma(-l_1) \Gamma(-l_3) \Gamma\left[\frac{1+l_3-2s}{1-2s} \frac{1-s}{1-l_1-s}\right], \quad (18)$$

$$\text{Rel}_1 < 0, \quad \text{Rel}_3 < 0, \quad 2\text{Res} < 1 + l_3, \quad \text{Res} < 1.$$

Отсюда, применяя формулу [2]

$$\Gamma(2a) = 2^{2a-1} \sqrt{\pi} \Gamma(a) \Gamma(a + 1/2), \quad (19)$$

из (18) имеем

$$K*(s) = 2^{l_3+1} \Gamma(-l_1) \Gamma(-l_3) \Gamma\left[\frac{\frac{1+l_3}{2}-s}{1-l_1-s} \frac{\frac{2+l_3}{2}-s}{\frac{1}{2}-s}\right], \quad (20)$$

$$\operatorname{Re} l_1 < 0, \quad \operatorname{Re} l_3 < 0, \quad 2\operatorname{Re} s < 1 + l_3, \quad 2\operatorname{Re} s < 2 + l_3.$$

В силу формулы [3]

$$M \left\{ (x-1)_+^{c-1} F(a, b, c; 1-x); s \right\} = \Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} 1+a-c-\gamma-s, & 1+b-c-s \\ 1-s, & 1+a+b-c-s \end{matrix} \right], \quad (21)$$

$$\operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re}(a-c), \quad 1 + \operatorname{Re}(b-c).$$

$$M \{ x^p f(x); s \} = f * (s+p), \quad (22)$$

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}), \quad (23)$$

из (20), получаем

$$K(\sigma) = \frac{2^{l_3+1} \Gamma(-l_1) \Gamma(-l_3)}{\Gamma(-l_1-l_3)} x^{l_1+\frac{1+l_3}{2}} y^{\frac{l_3+1}{2}} (x-y)_+^{-l_1-l_3-1} \times \\ \times F\left(-\frac{1+l_3}{2}, -l_1-\frac{l_3}{2}, -l_1-l_3; \frac{x-y}{x}\right). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (7) и после некоторых преобразований получим равенство (3).

Аналогично доказывается случай, когда $0 < l_1 < -l_3$. $\square$

ЛЕММА 2. Если выполнены условия:

$$1) \phi(x) \in L(0,1), 2) l_1 + l_3 < 0, l_3 < 0, l_2 > -l_1,$$

то почти всюду на $(0,1)$ справедлива формула

$$D_{0x^2}^{l_1} (x^2)^{l_2} D_{0x}^{l_3} \phi(x) = \frac{(x^2)^{l_2-l_1}}{2^{l_3}} \int_0^x y^{-l_3-1} G_{33}^{30} \left(\frac{y^2}{x^2} \left| \begin{matrix} 1+l_2-l_1, & 1, & \frac{1}{2} \\ \frac{3+l_3}{2}, & \frac{2+l_3}{2}, & 1+l_2 \end{matrix} \right. \right) \phi(y) dy. \quad (25)$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $l_1 < 0, l_3 < 0$.

Тогда в силу определения (1) имеем

$$D_{0x^2}^{l_1} (x^2)^{l_2} D_{0x}^{l_3} \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (x^2-t^2)^{-l_1-1} (t^2)^{l_2} dt^2 \int_0^t (t-y)^{-l_3-1} \phi(y) dy. \quad (26)$$

После некоторых преобразований из (26) находим

$$I = D_{0x}^{l_1} x^{l_2} D_{0\sqrt{x}}^{l_3} \phi(\sqrt{x}) = \\ = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (x-t)^{-l_1-1} t^{l_2} dt \int_0^t (\sqrt{t}-\sqrt{y})^{-l_3-1} \phi(\sqrt{y}) d\sqrt{y}. \quad (27)$$

Меняя порядок интегрирования получим

$$I = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x \phi(\sqrt{y}) d\sqrt{y} \int_y^x (x-t)^{-l_1-1} t^{l_2} (\sqrt{t}-\sqrt{y})^{-l_3-1} dt. \quad (28)$$

Полагал $t = xz$ из (28) находим

$$I = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x y^{-l_1-l_2-\frac{l_3+1}{2}} Q(\sigma) d\sqrt{y}. \quad (29)$$

где

$$Q(\sigma) = \sigma^{l_2-l_3} \int_0^\infty z^{l_2} f_1(\sqrt{\sigma z}) f_2(z) dz, \quad (30)$$

$$f_1(z) = (z-1)_+^{-l_3-1}; \quad f_2(z) = (1-z)_+^{-l_1-1}, \quad (31)$$

$$\sigma = \frac{x}{y}; \quad z_+^l = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z^l, & z > 0 \end{cases}.$$

Используя формулу (11) из (30) получим

$$M\{Q(\sigma); s\} = f_1 * (s) f_2 * (1 + l_2 - s), \quad (32)$$

Далее в силу формулы (13), (14), (15) находим

$$f_1 * (s) = 2\Gamma(-l_3)\Gamma\left[\frac{1+l_3-2s}{1-2s}\right], \quad \text{Rel}_3 < 0, \quad 2\text{Res} < 1 + l_3, \quad (33)$$

$$f_2 * (s) = \Gamma(-l_1)\Gamma\left[\frac{s}{s-l_1}\right], \quad \text{Rel}_1 < 0, \quad \text{Res} > 0, \quad (34)$$

Подставляя (33), (34) в (32) получим

$$Q * (s) = 2\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)\Gamma\left[\frac{1+l_3-2s}{1-2s} \frac{1+l_2-s}{1+l_2-l_1-s}\right], \quad (35)$$

$$\text{Rel}_1 < 0, \quad \text{Rel}_3 < 0, \quad 2\text{Res} < 1 + l_3, \quad \text{Res} < 1 + l_2.$$

На основании формулу (19) (35) имеем

$$Q * (s) = 2^{l_3+1}\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)\Gamma\left[\frac{\frac{1+l_3}{2}-s}{\frac{1}{2}-s} \frac{\frac{2+l_3}{2}-s}{1-s} \frac{1+l_3-s}{1+l_3-l_1-s}\right], \quad (36)$$

$$\text{Rel}_1 < 0, \quad \text{Rel}_3 < 0, \quad 2\text{Res} < 1 + l_3, \quad 2\text{Res} < 2 + l_3, \quad \text{Res} < 1 + l_2.$$

В силу формулы [2]

$$M\left\{G_{p'q'}^{m'n'}\left(z \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{p'} \\ b_1, b_2, \dots, b_{q'} \end{matrix} \right. \right); s\right\} = \\ = \Gamma\left[\frac{s+b_1, s+b_2, \dots, s+b_{m'}, 1-a_1-s, 1-a_2-s, \dots, 1-a_{n'}-s}{s+a_{n'+1}, s+a_{n'+2}, \dots, s+a_{p'}, 1-b_{m'+1}-s, 1-b_{m'2}-s, \dots, 1-b_{q'}-s}\right] \quad (37)$$

$$- \min_{1 \leq k' \leq m'} \text{Re} b_{k'} < \text{Res} < 1 - \max_{1 \leq j \leq n'} \text{Re} a_j, \quad p' = q' \geq 1, \quad m' + n' = p', \quad \sum_{j=1}^{n'} (a_j - b_j) > 0$$

из (35) получаем

$$Q(\sigma) = 2^{l_3} \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} G_{33}^{30}\left(\frac{y}{x} \left| \begin{matrix} -\frac{1+l_3}{2}, -\frac{l_1}{2}, -l_2 \\ l_1-l_2, 0, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right). \quad (38)$$

Подставляя (35) в (29) и после некоторых преобразований получим равенство (25).
 $\square$

Библиографический список

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.2. М.: Наука, 1969. 344 с.
2. Маричев О.Н. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск.: Наука и техника, 1978. 312 с.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.Н. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. 688 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.10.2014