УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

О.Х. Абдуллаев

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок
E-mail: obidjon.mth@gmail.com

Мы изучаем существование и единственность решения одной краевой задачи для нагруженного эллиптико-гиперболического уравнения второго порядка с двумя линиями изменения типа в двусвязной области. Когда исследуемая область односвязна, аналогичные результаты были получены в работах Д.М. Курязова.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, эллиптико- гиперболический тип, двусвязная область, существование и единственность решения, принцип экстремума, интегральные уравнения

MSC 35M10

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED EQUATION ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE IN A DOUBLY CONNECTED DOMAIN

O.Kh. Abdullaev

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan,
Tashkent c., VUZ gorodok st.
E-mail: obidjon.mth@gmail.com

We study the existence and uniqueness of the solution of one boundary value problem for the loaded elliptic-hyperbolic equation of the second order with two lines of change of type in double-connected domain. Similar results have been received by D.M.Kuryhazov, when investigated domain is one-connected.

Key words: the loaded equation, elliptic - hyperbolic type, double-connected domain, existence and uniqueness of solution, an extremume principle, the integrated equations

Введение

В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод, почвенной влаги возникла необходимость в изучении нового класса дифференциальных уравнений, получивших название нагруженных уравнений. Отметим что, интересные результаты, посвященные краевым задачам для нагруженных уравнений гиперболического, параболического, эллиптического и смешанного типов второго порядка, была получена в работах А.М.Нахушева [1], В.А. Елеева [2], В.М. Казиева [3]-[4], И.Н. Ланина [5] Б.И. Исломова и Д.М. Курьязова [6], Д.М. Курьязова [7], М.И. Рамазанова [8] и К.У. Хубиева [9].

Насколько нам известно, краевые задачи для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области не были исследованы.

В данной работе доказывается существование и единственность решения одной краевой задачи для нагруженного эллиптико-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа в двусвязной области.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+sgn(xy)u_{yy}+ \tag{1}$$

$$\frac{1-sgn(xy)}{2}\left[\lambda_1\frac{1+sgnx(x+y)}{2}u(x,0)-\lambda_2\frac{1+sgny(x+y)}{2}u(0,y)\right]=0$$

в конечной двусвязной области Ω, ограниченной линиями:

$$\sigma_1:\ x^2+y^2=1,\ x>0, y>0;\quad \sigma_2:\ x^2+y^2=q^2;\ x>0, y>0;$$

$$\sigma_1^*:\ x^2+y^2=1,\ x<0, y<0;\quad \sigma_2^*:\ x^2+y^2=q^2,\ x<0, y<0, (0<q<1)$$

и характеристиками:

$$A_jA_j^*: x-y=(-1)^{j+1};\quad B_jB_j^*: x-y=(-1)^{j-1}\cdot q;\ (0<q<1), (j=1,2)$$

уравнения (1).

Введем обозначения:

$$E_j\left(\frac{q-(-1)^j}{2};\frac{q+(-1)^j}{2}\right),\ E_j^*\left(\frac{(-1)^{j-1}-q}{2};\frac{(-1)^j-q}{2}\right),\ C_j^{\left((-1)^{j-1}\frac{q}{2};(-1)^j\frac{q}{2}\right)},(j=1,2);$$

$$\Omega_0=\Omega\cap(x>0)\cap(y>0),\quad \Omega_0^*=\Omega\cap(x<0)\cap(y<0);$$

$$\Delta_1=\Omega\cap(x+y>q)\cap(y<0),\ \Delta_1^*=\Omega\cap(x+y<-q)\cap(x>0);$$

$$\Delta_2=\Omega\cap(x+y>q)\cap(x<0),\ \Delta_2^*=\Omega\cap(x+y<-q)\cap(y>0);$$

$$D_1=\Omega\cap(0<x+y<q)\cap(y<0),\ D_1^*=\Omega\cap(-q<x+y<0)\cap(x>0);$$

$$D_2=\Omega\cap(0<x+y<q)\cap(y>0),\ D_2^*=\Omega\cap(-q<x+y<0)\cap(x<0);$$

$$\Omega_1=\Omega_0\cup\Omega_0^*,\ D_0=\Omega_0\cup\Delta_1\cup\Delta_2, D_0^*=\Omega_0^*\cup\Delta_1^*\cup\Delta_2^*,$$

$$D_3=D_1\cup D_1^*, D_4=D_2\cup D_2^*,$$

$$I_j=\left\{t:(-1)^{j-1}\frac{q}{2}<t<q(2-j)\right\};\ I_j^*=\left\{t:q(j-1)<t<(-1)^{j-1}\frac{q}{2}\right\};$$

$$I_{2+j}=\left\{t:\frac{q+(-1)^{j-1}}{2}<t<2-j\right\};\ I_{4+j}=\left\{t:0<(-1)^{j-1}t<1\right\},\ (j=1,2),$$

где $t=\begin{cases} x \text{ при } j=1,\\ y \text{ при } j=2.\end{cases}$

$\Omega_0,\Delta_j,\sigma_j,D_j$ – геометрические фигуры, симметричны, соответственно, фигурам $\Omega_0^*,\Delta_j^*,\sigma_j^*,D_j^*$, $(j=1,2)$ относительно прямой $x+y=0$.

В области Ω исследуется следующая задача.

Задача I. . *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$,

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega\backslash(xy=0)\backslash(x+y=0)\backslash(x+y=\pm q)$, кроме того, $u_y\in C(A_1B_1\cup A_2^*B_2^*)$, $u_x\in C(A_2B_2\cup A_1^*B_1^*)$, причем $u_x(0,t),u_y(t,0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t\to\pm q$, а при $t\to\pm 1$ ограничены;

3) на линиях изменения типа выполняются условия склеивания

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ (x,0)\in A_1B_1,\quad u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ (x,0)\in A_2^*B_2^*, \tag{2}$$

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ (0,y)\in A_2B_2,\quad u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ (0,y)\in A_1^*B_1^*. \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\Big|_{\sigma_j}=\varphi_j(x,y);\ \ (x,y)\in\overline{\sigma_j}, \tag{4}$$

$$u(x,y)\Big|_{\sigma_j^*}=\varphi_j^*(x,y);\ \ (x,y)\in\overline{\sigma_j^*}, \tag{5}$$

$$u(x,y)\Big|_{A_jE_j}=\psi_j(t);\ \ t\in\overline{I_{2+j}}, \tag{6}$$

$$u(x,y)\Big|_{B_jC_j}=g_j(t);\ \ t\in\overline{I_j}, \tag{7}$$

$$u(x,y)\Big|_{B_j^*C_j}=g_j^*(t);\ \ t\in\overline{I_j^*}, \tag{8}$$

где $\varphi_j(x,y)$, $\varphi_j^*(x,y)$, $\psi_j(t)$, $g_j(t)$, $g_j^*(t)$, $(j=1,2)$ – заданные функции, причем:

$$\left.\begin{array}{l} g_j\left(\frac{q}{2}\right)=g_j^*\left(\frac{q}{2}\right),\ \varphi_1(1,0)=\psi_1(1),\ \varphi_2(q,0)=g_1(q),\ \varphi_2(0,q)=g_2(q),\\ \varphi_1^*(-1,0)=\psi_2(-1),\ \varphi_2^*(0,-q)=g_1^*(0),\ \varphi_2^*(-q,0)=g_2^*(0),\end{array}\right\} \tag{9}$$

$$\varphi_j(x,y)=(xy)^\gamma\overline{\varphi_j}(x,y);\ \overline{\varphi_j}(x,y)\in C\left(\overline{\sigma_j}\right), \tag{10}$$

$$\varphi_j^*(x,y)=(xy)^\gamma\overline{\varphi_j^*}(x,y);\ \overline{\varphi_j^*}(x,y)\in C\left(\overline{\sigma_j^*}\right),\ 2<\gamma<3, \tag{11}$$

$$\psi_j(t)\in C\left(\overline{I_{2+j}}\right)\cap C^2\left(I_{2+j}\right),\ g_j(t)\in C\left(\overline{I_j}\right)\cap C^2\left(I_j\right),\ g_j^*(t)\in C\left(\overline{I_j^*}\right)\cap C^2\left(I_j^*\right), \tag{12}$$

Лемма 1. *Любое регулярное решение уравнения (1) при $xy \neq 0,\ x+y \neq 0$ представимо в виде*

$$u(x,y) = z(x,y) + \frac{1-sgn(xy)}{2}\left[\frac{1+sgnx(x+y)}{2}\omega(x) + \frac{1+sgny(x+y)}{2}\omega(y)\right], \tag{13}$$

где $z(x,y)$ – регулярное решение уравнения

$$Lz \equiv z_{xx} + sgn(xy)z_{yy} = 0, \tag{14}$$

, а функции $\omega_j(t) = \begin{cases} \omega_1(x) \text{ при } j=1 \\ \omega_2(y) \text{ при } j=2 \end{cases}$ дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_1''(x) + \lambda_1\omega_1(x) + \lambda_1 z(x,0) = 0, x \in \left[-1; -\frac{q}{2}\right] \cup \left[\frac{q}{2}; 1\right], \tag{15}$$

$$\omega_2''(y) + \lambda_2\omega_2(y) + \lambda_2 z(0,y) = 0, y \in \left[-1; -\frac{q}{2}\right] \cup \left[\frac{q}{2}; 1\right],$$

соответственно.

Доказательство. Пусть функция вида (13), есть решение уравнения (1). Тогда, подставляя (13) в (1), при $x>0,\ y<0$ и $x+y>0$ ($x<0,\ y>0$ и $x+y<0$) имеем

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda_1 u(x,0) = z_{xx} - z_{yy} + \omega_1''(x) + \lambda_1\omega_1(x) + \lambda_1 z(x,0) = 0,$$

т.е. в силу (15) получим, что функция (13) удовлетворяет уравнению (1).

Теперь докажем обратное, т.е. пусть $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1) при $x>0,\ y<0$ и $x+y>0$ ($x<0,\ y>0$ и $x+y<0$), а функция $\omega_1(x)$ некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega_1''(x) + \lambda_1 u(x,0) = 0. \tag{16}$$

Докажем справедливость соотношения (13). Учитывая, что функция

$$\omega_1(x) = -\lambda_1\int_0^x (x-t)u(t,0)dt$$

есть частное решение уравнения (16), получим, что функция

$$u(x,y) = z(x,y) - \lambda_1\int_0^x (x-t)u(t,0)dt$$

является решением уравнения (1) при $x>0,\ y<0$ и $x+y>0$ ($x<0,\ y>0$и $x+y<0$), где $z(x,y)$ решение уравнения $z_{xx}-z_{yy}=0$, а функция $u(x,y) = -\lambda_1\int_0^x (x-t)u(t,0)dt$ есть частное решение уравнения (1), следовательно, представление (13) верно.

Аналогично доказывается случай $x<0,\ y>0$ и $x+y>0$ ($x>0,\ y<0$и $x+y<0$). **Лемма 1 доказана.** □

Учитывая, что функции $ax+b$ и $c+dy$ являются решениями уравнения (14), произвольные функции $\omega(x)$ и $\omega(y)$ можно подчинить условиям

$$\omega(1) = \omega'(1) = 0 \quad . \tag{17}$$

Решения задачи Коши (15), (16) и (17), соответственно имеют вид:

$$\omega_1(x) = -\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_x^1 z(t,0)K(x,t)dt \tag{18}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} sh\sqrt{-\lambda_1}\,(x-t) & \text{при } \lambda_1 < 0 \\ \sin\sqrt{\lambda_1}\,(x-t) & \text{при } \lambda_1 > 0 \end{cases},$$

и

$$\omega_2(y) = -\sqrt{|\lambda_2|}\int\limits_y^1 z(0,t)K(y,t)dt \tag{19}$$

где

$$K(y,t) = \begin{cases} sh\sqrt{-\lambda_2}\,(y-t) & \text{при } \lambda_2 < 0 \\ \sin\sqrt{\lambda_2}\,(y-t) & \text{при } \lambda_2 > 0 \end{cases}.$$

В силу (13) и (17), задача I сведется к задаче I* для уравнения (14) с краевыми условиями:

$$z(x,y)\Big|_{\sigma_j} = \varphi_j(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma_j}, \tag{20}$$

$$z(x,y)\Big|_{\sigma_j^*} = \varphi_j^*(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma_j^*}, \tag{21}$$

$$z(x,y)\Big|_{A_jE_j} = \psi_j(t) - \omega_j(t), \quad t \in \overline{I_{2+j}}, \tag{22}$$

$$z(x,y)\Big|_{B_jC_j} = g_j(t) - \omega_j(t), \quad t \in \overline{I_j}, \tag{23}$$

$$z(x,y)\Big|_{B_j^*C_j} = g_j^*(t) - \omega_j(t), \quad t \in \overline{I_j^*}, \tag{24}$$

Единственность решения задачи

Единственность решения задачи I следует из единственности решения задачи I*. В силу решения задачи Коши-Гурса для уравнения (14) в области Δ_1 (Δ_2), удовлетворяющие условиям (22) и

$$z_y(x,0) = \nu_1(x),\ x \in A_1B_1(z_x(0,y) = \nu_2(y),\ y \in A_2B_2)$$

получим

$$\tau_j(t) = \int\limits_t^1 \nu_j(s)ds + 2\psi_j\left(\frac{t+1}{2}\right) - 2\omega_j\left(\frac{t+1}{2}\right) - \psi_j(1), \tag{25}$$

где $\tau_1(x) = z(x,0) = u(x,0) - \omega_1(x),\ (x \in A_1B_1)$ и $\tau_2(y) = z(0,y) = u(0,y) - \omega_2(y), (y \in A_2B_2)$.

В силу (18) и (19) из (25) соответственно находим

$$\nu_j(t) = -\tau_j'(t) + \psi_j'\left(\frac{t+1}{2}\right) + \sqrt{|\lambda_j|}\int\limits_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_j(s)K_j(t,s)\,ds, \tag{26}$$

$$K_j(t,s)=\begin{cases}\sqrt{-\lambda_j}ch\sqrt{-\lambda_j}\left(\frac{t+1}{2}-s\right) \text{ при } \lambda_j<0\\ \sqrt{\lambda_j}\cos\sqrt{\lambda_j}\left(\frac{t+1}{2}-s\right) \text{ при } \lambda_j>0,\end{cases} \tag{27}$$

Теорема 1. *Если*

$$\lambda_j \leq \frac{\pi^2}{(1-q)^2}\ (j=1,2) \tag{28}$$

то задача I^* не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $\psi_1(x)\equiv\psi_2(y)\equiv 0$. Тогда, так как $\psi_1(1)=\omega(1)=0$, то $\tau_1(1)=0$. Отсюда следует, что $\tau_1(x)$ имеет хотя бы одну точку нуля в отрезке $[q,1]$. Пусть $x_i(i=\overline{1,n})$ нули функции $\tau_1(x)$, тогда рассмотрим отрезок $[x_1,x_2]\subset\overline{AB}$. Так как $\tau_1(x_1)=\tau_1(x_2)=0$, то функция $\tau_1(x)>0$ или $\tau_1(x)<0$ для всех $x\in[x_1;x_2]$. Предположим $\tau_1(x)>0 \quad (\tau_1(x)<0)$, тогда покажем что внутри этого интервала $\tau_1(x)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума).

Пусть в точке $x_0\in(x_1,x_2)$ функция $\tau_1(x)$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум), тогда в силу (27), (28) с учетом $\psi_1(x)=0$ из (26) получим $\nu_1(x_0)\geq 0(\nu_1(x_0)\leq 0)$, а это противоречит известному принципу Зарембо-Жиро [10], согласно которому в точке положительного максимума (отрицательного минимума) должно быть $\nu_1(x_0)<0 \quad (\nu_1(x_0)>0)$. Следовательно, $\tau_1(x)$ не достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в точке $x_0\in(x_2,x_1)$.

Таким образом,

$$\tau_1(x)=0, \quad \forall x\in[x_1,x_2]. \tag{29}$$

Аналогично, выше изложенным методом доказывается, что

$$\tau_1(x)=0, \quad \forall x\in[_i,{}_{i+1}]\ \ (i=2,3,4,...,n-1). \tag{30}$$

Если $x_1=q$, т.е. $\tau(x_1)=\tau(q)=0$, то из (29) и (30) следует $\tau_1(x)=0$, $\forall x\in A_1B_1$, а при $x_1\neq q$ функция $\tau_1(x)$ не может иметь экстремума в интервале (q,x_1). Тогда функция $\tau_1(x)$ либо знакопостоянна в $\left[q,{}_1\right]$, либо $\tau_1(x)=0$, $\forall x\in\left[q,x_1\right]$. В силу (18), (19) с учетом $\varphi_2(q;0)=0$ из (13) получим

$$\tau_1(q)=\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_q^1\tau_1(t)K(q,t)dt. \tag{31}$$

Пусть $\tau_1(x)>0\ \ (\tau_1(x)<0)$, $x\in[q,x_1]$, тогда учитывая $K(q,t)\leq 0$ из (31) имеем $\tau_1(q)\leq 0$ ($\tau_1(q)\geq 0$). Следовательно, функция $\tau_1(x)$ знакопостоянна в $\left[q,x_1\right]$. Отсюда, принимая во внимание $\tau_1(x_1)=0$, заключаем, что

$$\tau_1(x)=0,\ \forall x\in[q,x_1]. \tag{32}$$

В силу (30) и (32) имеем

$$\tau_1(x)=0,\ \forall x\in[q,1]. \tag{33}$$

Аналогичным образом доказывается что

$$\tau_2(y)=0,\ \forall y\in A_2B_2.$$

В силу (33) из (18) и (19) следует, что

$$\omega_1(x)\equiv\omega_2(y)\equiv 0. \tag{34}$$

В силу (33) и (34) с учетом принципа экстремума для уравнений смешанного типа [11], [12] краевая задача I* с нулевыми данными не имеет отличного от нуля решения, т.е. $z(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$. Следовательно, решение задачи I* единственно. Теорема доказана.

В силу (34) с учетом $z(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$ из (12) имеем, $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Единственность решения задачи I доказана. □

Существование решения задачи I.

При доказательстве существования решения задачи I важную роль играют следующие вспомогательные задачи:

Задача $\mathbf{I}_1$. *Найти функцию $z(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $z(x,y) \in C(\overline{D_0}) \cap C^2(D_0 \backslash xy = 0) \cap C^1(D_0)$ решение уравнения (14);

2) $z_y \in C(A_1B_1)$, $z_x \in C(A_2B_2)$, причем $z_x(0,t), z_y(t,0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t \to q$ и при $t \to 1$ ограничены;

3) удовлетворяет краевым условиям (20) и (22).

Задача $\mathbf{I}_2$. *Найти функцию $z(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $z(x,y) \in C(\overline{D_0^*}) \cap C^2(D_0^* \backslash xy = 0) \cap C^1(D_0^*)$ решение уравнения (14);

2) $z_y \in C(A_1^*B_1^*)$, $z_x \in C(A_2^*B_2^*)$, причем $z_x(0,t), z_y(t,0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t \to -q$ и при $t \to -1$ ограничены;

3) удовлетворяет краевым условиям (21) и

$$z(x,y)\Big|_{A_j^*E_j^*} = \psi_j^*(t) - \omega_j(t)$$

где $\psi_j^*(t)$ – неизвестные функции, которые определяются далее, а $\omega_j(t)$ $(j = 1,2)$ определяются из (18) и (19).

Теорема 2. *Если выполнены (9), (11) и (12), то решение задачи I_1 существует и единственно.*

Доказательство. Единственность решения задачи I_1доказывается с помощью следующего принципа экстремума: решение $z(x,y)$ задачи I_1 при $\varphi_j(x,y) \equiv \psi_j(x) \equiv 0$ своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{D_0}$ достигает лишь на $\overline{\sigma}_1 \cup \overline{\sigma}_2$.

В силу единственности решения задачи Коши-Гурса в областях Δ_1 и Δ_2 для уравнения (1*), с учетом $\omega_j(t) \equiv 0$, $(j = 1,2)$ решение $z(x,y)$ задачи I_1 с нулевыми данными тождественно равно нулю, т.е. $z(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_0$. Единственность решение задачи $\mathrm{I}_1(D_0)$ доказана.

Переходим к доказательству существование решения задачи $\mathrm{I}_1(D_0)$.

Решение задачи N для уравнения (14) в области Ω_0 с краевыми условиями (20) и

$$z_y(x,+0) = \nu_1^+(x), \ (x,0) \in A_1B_1,$$

$$z_x(+0,y) = \nu_2^+(y), \ (0,y) \in A_2B_2$$

единственно и представимо в виде [12]

$$z(x,y)=\int\limits_{\sigma_1}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,y)dS-\int\limits_{\sigma_2}\varphi_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,y)dS+$$

$$+\int\limits_q^1\nu_1^+(t)G(t,0;x,y)dt+\int\limits_q^1\nu_1^+(t)G(0,t;x,y)dt, \qquad (35)$$

где $G(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи N для уравнения Лапласа в области Ω_0, которая имеет следующий вид [12]

$$G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\theta_1\left(\frac{\ln\nu+\ln\overline{\mu}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln\overline{\nu}+\ln\overline{\mu}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln(-\nu)+\ln\overline{\mu}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln(-\overline{\nu})+\ln\overline{\mu}}{2\pi ir}\right)}{\theta_1\left(\frac{\ln\nu-\ln\mu}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln\overline{\nu}-\ln\mu}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln(-\nu)-\ln\mu}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln(-\overline{\nu})-\ln\mu}{2\pi ir}\right)}\right|, \qquad (36)$$

где $\nu=\xi+i\eta$, $\overline{\nu}=\xi-i\eta$, $\mu=x+iy$, $\overline{\mu}=x-iy$, $r=\frac{1}{\pi i}\ln q$, $i^2=-1$, $\theta_1(\xi)=\theta_1\left(\xi\left|-\frac{1}{r}\right.\right)$ – тэта-функция.

Полагая в (35) $y=0$ $(x=0)$, получим соотношение между $\tau_1^+(x)$ и $\nu_1^+(x)$ $\left(\tau_2^+(y)\text{ и }\nu_2^+(y)\right)$ на A_1B_1 (A_2B_2) принесенное из области Ω_0

$$\tau_1^+(x)=\sum_{k=1}^2(-1)^{k-1}\int\limits_{\sigma_k}\varphi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)dS+\int\limits_q^1\nu_1^+(t)G(t,0;x,0)dt+$$

$$+\int\limits_q^1\nu_2^+(t)G(0,t;x,0)dt, \qquad (37)$$

$$\left(\tau_2^+(y)=\sum_{k=1}^2(-1)^{k-1}\int\limits_{\sigma_k}\varphi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;0,y)dS+\int\limits_q^1\nu_1^+(t)G(t,0;0,y)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_q^1\nu_2^+(t)G(0,t;0,y)dt\right).$$

Дифференцируя равенства (37) по x (а второе по y), получим

$$\tau_1'^+(x)=\int\limits_q^1\nu_1^+(t)\frac{\partial G(t,0;x,0)}{\partial x}dt+\int\limits_q^1\nu_2^+(t)\frac{\partial G(0,t;x,0)}{\partial x}dt+F_1'(x)$$

$$F_1(x)=\sum_{k=1}^2(-1)^{k-1}\int\limits_{\sigma_k}\varphi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)dS. \qquad (38)$$

$$\left(\tau_2'^+(y)=\int\limits_q^1\nu_1^+(t)\frac{\partial G(t,0;0,y)}{\partial y}dt+\int\limits_q^1\nu_2^+(t)\frac{\partial G(0,t;0,y)}{\partial y}dt+F_2'(y)\right),$$

$$\left(\text{где } F_2(y)=\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\int\limits_{\sigma_k}\varphi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;0,y)dS\right).$$

Исключив $\tau_j^{'-}(t)$ $(j=1,2)$ из соотношений (26) и (38 получим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \nu_1^+(x)+\int\limits_q^1\nu_1^+(t)\bar{K}_1(x,t)dt=\Phi_1^(x)-\int\limits_q^1\nu_2^(t)\bar{K}_2(x,t)dt\\ \nu_2^+(y)+\int\limits_q^1\nu_2^+(t)\bar{K}_2(t,y)dt=\Phi_2(y)-\int\limits_q^1\nu_1^(t)\bar{K}_2(y,t)dt, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$\Phi_1^(x)=\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)+\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_{\frac{x+1}{2}}^{1}\tau_1(t)K_1(x,t)\,dt-F_1'(x), \tag{40}$$

$$\Phi_2(y)=\psi_2'\left(\frac{y+1}{2}\right)+\sqrt{|\lambda_2|}\int\limits_{\frac{y+1}{2}}^{1}\tau_2(t)K_2(y,t)\,dt-F_2'(y).$$

$$\bar{K}_1(x,t)=\frac{2\ln|t|}{x\ln q}+K(x,t)+K(x,-t), \tag{41}$$

$$\bar{K}_2(x,t)=\bar{K}_1(x,-it), \tag{42}$$

$$K(x,t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-tx}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}}{t-q^{2n}x}-\frac{q^{2n}t}{1-q^{2n}tx}-\frac{q^{-2n}t}{1-q^{-2n}tx}+\frac{q^{-2n}}{t-q^{2n}x}\right)\right]. \tag{43}$$

Исследуем правую часть интегрального уравнения (39):

$$\Phi_1^*(x)=\Phi_1^(x)-\int\limits_q^1\nu_2^(t)\bar{K}_2(x,t)dt=$$

$$=\int\limits_{\sigma_2}\varphi_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\xi}\right)d\eta-\int\limits_{\sigma_2}\varphi_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\eta}\right)d\xi-$$

$$-\int\limits_{\sigma_1}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\xi}\right)d\eta+\int\limits_{\sigma_1}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\eta}\right)d\xi-$$

$$-\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)-\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_{\frac{x+1}{2}}^{1}\tau_1(t)K_1(x,t)\,dt-\int\limits_q^1\nu_2^(t)\bar{K}_2(x,t)dt=$$

$$=2\int\limits_0^1\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\xi}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^1 \varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\eta}\right)d\xi-2\int_0^q \varphi_2(\xi,\eta)\frac{\xi}{\sqrt{q^2-\xi^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\xi}\right)d\xi-$$

$$-\int_0^q \varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(\xi,\eta;x,0)}{\partial\eta}\right)d\xi-\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)-$$

$$-\sqrt{|\lambda_1|}\int_{\frac{x+1}{2}}^1 \tau_1(t)K_1(x,t)\,dt-\int_q^1 \nu_2^{(}t)\bar{K}_2(x,t)dt=$$

$$=R_1(x)+R_2(x)+R_3(x)+R_4(x)+R_5(x). \qquad (44)$$

Исследуем функцию $R_1(x)$ при $x\to 1$ $(x\to q)$.

В силу (10) учетом вида σ_1 из (44) имеем

$$R_1(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 \overline{\varphi}_1\left(\xi,\sqrt{1-\xi^2}\right)\xi^{\gamma+2}\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1-x^2}{x^2-2\xi x+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x^2q^{4n}}{x^2q^{4n}-2q^{2n}\xi x+1}-\frac{x^2-q^{4n}}{x^2-2q^{2n}\xi x+q^{4n}}\right)\right]d\xi+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^1 \overline{\varphi}_1\left(\xi,\sqrt{1-\xi^2}\right)\xi^{\gamma+2}\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1-x^2}{x^2+2\xi x+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x^2q^{4n}}{x^2q^{4n}+2q^{2n}\xi x+1}-\frac{x^2-q^{4n}}{x^2+2q^{2n}\xi x+q^{4n}}\right)\right]d\xi-$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_0^1 \overline{\varphi}_1\left(\xi,\sqrt{1-\xi^2}\right)\frac{\xi^{\gamma+2}\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{x\ln q}d\xi=R_{11}(x)+R_{12}(x)+R_{13}(x). \qquad (45)$$

Исследуем функцию $R_{11}(x)$ при $x\to 1$ $(x\to q)$. В силу (10) из (45) имеем

$$|R_{11}(x)|\le const\cdot\frac{\Gamma(\gamma+3)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+5}{2}\right)}\frac{x}{x^2+1}F\left(\gamma+3;1;\frac{3-\gamma}{2};\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)+$$

$$+const\cdot\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{x(1-x)^{\gamma-1}}{(x^2+1)^{\frac{\gamma+1}{2}}}F\left(\frac{1+\gamma}{2};\frac{3\gamma+5}{2};\frac{1+\gamma}{2};\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma(\gamma+3)\Gamma\left(\frac{\gamma-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)}\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}F\left(\gamma+3;2;\frac{5-\gamma}{2};\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(2)}\frac{x(1+x)(1-x)^{\gamma-2}}{(1+x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}F\left(\frac{\gamma+1}{2};\frac{3\gamma+3}{2};\frac{\gamma-1}{2};\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right)+$$

$$+const\cdot\int_0^1 \xi^{\gamma+2}(1-\xi)^{\frac{\gamma-1}{2}}\,|L_{11}(x,\xi)|\,d\xi.$$

где $L_{11}(x,\xi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x\cdot q}{x^2q^{4n}+1}\left(1-\frac{2q^{-2n}\xi x}{q^{4n}x^2+1}\right)^{-1}+\frac{q^{4n}x\left(1-x^2q^{4n}\right)}{\left(q^{4n}x^2+1\right)^2}\left(1-\frac{2q^{-2n}\xi x}{q^{4n}x^2+1}\right)^{-2}+\right.$

$$\left.+\frac{x}{x^2+q^{4n}}\left(1-\frac{2q^{2n}\xi x}{x^2+q^{4n}}\right)^{-1}-\frac{x\left(x^2-q^{4n}\right)^2}{\left(x^2+q^{4n}\right)^2}\left(1-\frac{2q^{2n}\xi x}{x^2+q^{4n}}\right)^{-2}\right].$$

Очевидно что, функция $L_{11}(x,\xi)\in C\left([q,1]\times[0,1]\right)$, т.е. $|L_{11}(x,t)|\leq const$, следовательно, в силу свойств гипергеометрических функций имеем

$$|R_{11}(x)|\leq const. \tag{46}$$

Аналогично доказывается, что

$$|R_{12}(x)|\leq const\text{и}\quad |R_{13}(x)|\leq const. \tag{47}$$

Следовательно, из (46),47) и (45) получим, что

$$|R_1(x)|\leq const \tag{48}$$

Точно так же находится оценка для функции $R_2(x)$, т.е.

$$|R_2(x)|\leq const. \tag{49}$$

Теперь исследуем функцию $R_3(x)$. В силу (44) с учетом вида σ_2 имеем

$$R_3(x)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^q\overline{\varphi}_2(\xi,\eta)\,(\xi\eta)^{\gamma}\frac{\xi}{\sqrt{q^2-\xi^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x-\xi}{x^2-2\xi x+q^2}-\frac{x-\xi q^2x^2}{1-2\xi x+q^2x^2}+\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2\xi-q^{2n}x}{q^2x^2-2q^{2n}\xi x+q^{4n}}-\frac{\xi-q^{2n}x}{q^2-2q^{2n}\xi x+q^{4n}x^2}+\frac{q^{2n}x-q^{4n}\xi}{x^2-2q^{2n}\xi+q^{4n+2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{xq^{2n}-q^{4n}\xi x^2}{1-2q^{2n}\xi x+q^{4n+2}x^2}\right]d\xi+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^q\overline{\varphi}_2\,(\xi,\eta)\,(\xi\eta)^{\gamma}\frac{\xi}{\sqrt{q^2-\xi^2}}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x+\xi}{x^2+2\xi x+q^2}-\frac{x+\xi x^2q^2}{1+2\xi x+q^2x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2\xi-q^{2n}x}{q^2x^2+2q^{2n}\xi x+q^{4n}}-\frac{\xi+q^{2n}x}{q^2+2q^{2n}\xi x+q^{4n}x^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q^{2n}x+q^{4n}\xi}{x^2+2q^{2n}\xi x+q^{4n+2}}+\frac{xq^{2n}+q^{4n}x^2}{1+2q^{2n}\xi x+q^{4n+2}x^2}\right)\right]d\xi-\frac{4}{\pi q}\int\limits_0^q\overline{\varphi}_2\,(\xi,\eta)\times \tag{50}$$

$$\times\frac{\xi^{\gamma+1}\eta^{\gamma-1}(\xi+\eta)}{x\ln q}d\xi=R_{31}+R_{32}+R_{33}.$$

Исследуем функцию $R_{31}(x)$. Выполнив замену $\xi=qt$ из (50) получим

$$|R_{31}(x)|\leq const\cdot\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)}\frac{1}{x^2+q^2}F\left(\gamma+2;1;\frac{3-\gamma}{2};\frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+3\gamma}{2}\right)}\frac{x^2}{(x^2+q^2)^2}F\left(\gamma+2;2;\frac{5-\gamma}{2};\frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)}\frac{1}{1+q^2x^2}F\left(\gamma+2;1;\frac{3-\gamma}{2};\frac{(1-xq)^2}{1+q^2x^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+1}{2}\right)}\frac{x^2}{(1+q^2x^2)^2}F\left(\gamma+2;2;\frac{5-\gamma}{2};\frac{(1-xq)^2}{1+x^2q^2}\right)+$$

$$+const\cdot\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{(x-q)^{\gamma-1}}{(x^2+q^2)^{\frac{1+\gamma}{2}}}F\left(\frac{\gamma+1}{2};\frac{3\gamma+3}{2};\frac{\gamma+1}{2};\frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(2)}\frac{x^2(x-q)^{\gamma-3}}{(x^2+q^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}F\left(\frac{\gamma+1}{2};\frac{3\gamma+1}{2};\frac{\gamma-1}{2};\frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right)+$$

$$+const\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(2)}\frac{x^2(1-xq)^{\gamma-3}}{(1+q^2x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}F\left(\frac{\gamma+1}{2};\frac{3\gamma+1}{2};\frac{\gamma-1}{2};\frac{(1-xq)^2}{1+x^2q^2}\right)+ \tag{51}$$

$$+const\cdot\int_0^1 t^{\gamma+1}(1-t)^{\frac{\gamma-1}{2}}\left|L_{31}(x,t)\right|dt.$$

где

$$L_{31}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2xqt-q^{2n}}{q^2x^2+q^{4n}}\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{q^2x^2+q^{4n}}\right)^{-1}+\frac{2qx\left(q^{2n}-2qtx\right)\left(qx-q^{2n}t\right)}{(q^2x^2+q^{4n})^2}\times\right.$$

$$\times\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{q^2x^2+q^{4n}}\right)^{-2}+\frac{q^{2n}}{q^2+q^{4n}x^2}\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{q^2+q^{4n}x^2}\right)^{-1}-$$

$$-\frac{2q^{4n}x(xq^{2n}-qt)}{(q^2+q^{4n}x^2)^2}\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{q^2+q^{4n}x^2}\right)^{-2}+\frac{q^{2n}}{x^2+q^{4n+2}}\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{x^2+q^{4n+2}}\right)^{-1}-$$

$$-\frac{2q^{2n}(x-q^{2n+1}t)^2}{x^2+q^{4n+2}}\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{x^2+q^{4n+2}}\right)^{-2}-\frac{q^{2n}(1-2q^{2n+1}tx)}{1+q^{4n+2}x^2}\left(1-\frac{2q^{2n+1}tx}{1+q^{4n+2}x^2}\right)^{-1}+$$

$$\left.+\frac{2q^{4n}\left(1-q^{2n+1}tx\right)\left(xq^{2n+2}-qt\right)}{(1+q^{4n+2}x^2)^2}\left(1-\frac{2q^{n+1}tx}{(1+q^{4n+2}x^2)}\right)^{-2}\right],$$

причем

$$\left|L_{31}(x,t)\right|\le const.$$

Отсюда в силу свойств гипергеометрических функций из (51) имеем

$$\left|R_{31}(x)\right|\le const(x-q)^{\gamma-3}\ (2<\gamma<3). \tag{52}$$

Точно также, оценивая функцию $R_{32}(x)$, получим

$$\left|R_{32}(x)\right|\le const. \tag{53}$$

$$|R_3(x)| \leq const(x-q)^{\gamma-3}\ (2<\gamma<3). \tag{54}$$

Аналогично выше изложенным методом можно оценить $R_4(x)$:

$$|R_4(x)| \leq const(x-q)^{\gamma-3}\ (2<\gamma<3). \tag{55}$$

Нетрудно заметить, что $R_3(x)$ и $R_4(x)$ при $x \to 1$ ограничены.

Рассмотрим функцию $R_5(x)$. В силу (43) из (44) имеем

$$R_5(x) = -\int\limits_q^1 \nu_2^+(t) K_2(x,t)\,dt, \tag{56}$$

где

$$K_2(x,t) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{it+x} + \frac{it}{1+itx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{q^{2n}}{it+q^{2n}x} + \frac{q^{2n}it}{1+q^{2n}itx} + \frac{q^{-2n}it}{1+q^{-2n}itx} - \right.\right.$$

$$\left. -\frac{q^{-2n}}{it+q^{2n}x}\right) - \frac{1}{it-x} + \frac{it}{1-itx} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}}{it-q^{2n}x} - \frac{q^{2n}it}{1-q^{2n}itx} - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{q^{-2n}it}{1-q^{-2n}itx} + \frac{q^{-2n}}{it-q^{2n}x}\right)\right] + \frac{2\ln|it|}{x\ln q}.$$

причем $K_2(x,t) \in C\left([q,1]\times[q,1]\right)$, т.е.

$$|K_2(x,t)| \leq const. \tag{57}$$

В силу (57) с учетом класса функции $\nu_2(t) \in C^2(q,1)$ из (56) следует, что

$$|R_5(x)| \leq const. \tag{58}$$

Таким образом, в силу (48), (49), (54), (55) и (56) с учетом (10), (12), имеем, что $\Phi_1^*(x) \in C^2(q,1)$, причем $\Phi_1^*(x)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $x \to q$, а при $x \to 1$ ограничена.

Аналогичным образом доказывается, что $\Phi_2^*(y) \in C^2(q,1)$, причем может иметь особенность порядка меньше единицы при $y \to q$, а при $y \to 1$ ограничена.

Система сингулярных интегральных уравнений (44) точно так, как и в [11]-[13], известным методом Карлемана-Векуа [14] сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость, которой следует из единственности решения задачи I_1.

Решая первое уравнение системы (39), находим

$$\nu_1^+(x) = \Phi_1^*(x) + \int\limits_q^1 \Phi_1^*(t)\bar{R}_1(x,t)\,dt = \Phi^{(}_1x) - \int\limits_q^1 \nu^{(}_2t)\bar{K}_2(x,t)\,dt +$$

$$+\int\limits_q^1 \left(\Phi^{(}_1t) - \int\limits_q^1 \nu^{(}_2s)\bar{K}_2(t,s)\,ds\right)\bar{R}_1(x,t)\,dt,$$

т.е.

$$\nu_1^{(}x) = \Phi_1^{(}x) + \int\limits_q^1 \Phi_1^{(}t)\bar{R}_1(x,t)dt - \int\limits_q^1 \nu_2^{(}t)K^*(x,t)dt \tag{59}$$

где $\bar{R}_1(x,t)$ - резольвента ядра $\bar{K}_1(x,t)$, а

$$K^*(x,t) = \bar{K}_2(x,t) + \int\limits_q^1 \bar{K}_2(x,t)\bar{R}_1(x,t)dt$$

причем $|\bar{R}_1(x,t)| \le const$, $|K^*(x,t)| \le const$.

Подставляя найденные значение $\nu_1^{(}x)$ (т.е (59)) во второе уравнение системы (39) получим интегральное уравнение относительно $\nu_2^{(}y)$:

$$\nu_2^{(}y) + \int\limits_q^1 \nu_2^{(}t)K_2^*(t,y)dt = \bar{\Phi}_2^*(y) \tag{60}$$

где

$$K_2^*(t,y) = \bar{K}_2^{(}t,y) - \int\limits_q^1 K^*(t,s)\bar{K}_2(y,s)ds\bar{\Phi}_2^*(y) = \Phi_2(y) -$$

$$\int\limits_q^1 \left(\Phi_1^{(}t) + \int\limits_q^1 \Phi_1^{(}s)\bar{R}_1(t,s)ds \right) \bar{K}_2(y,t)dt$$

причем $\left|\bar{\Phi}_2^*(y)\right| \le const$, $|K_2^*(x,t)| \le const$

Известно, что решение интегрального уравнения (60) имеет вид [14]:

$$\nu_2^{(}y) = \bar{\Phi}_2^*(y) + \int\limits_q^1 \bar{\Phi}_2^*(t)R_2^*(t,y)dt \tag{61}$$

где $R_2^*(x,t)$ - резольвента ядра $K_2^*(x,t)$,

$$\bar{\Phi}_2^*(y) = A(y) + \sqrt{|\lambda_2|} \int\limits_{\frac{y+1}{2}}^1 \tau_2(t)K_2\,(y,t)\,dt -$$

$$-\int\limits_q^1 \left(\sqrt{|\lambda_1|} \int\limits_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s)K_1\,(t,s)\,ds + \int\limits_q^1 \sqrt{|\lambda_1|} \int\limits_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s)K_1\,(t,s)\,\bar{R}_1(s,z)dzds \right) \bar{K}_2(t,y)dt, \tag{62}$$

здесь $A(y)$ известная функция, которая зависит от заданных функций.

Подставляя (61) в (59) находим

$$\nu_1^{(}x) = \bar{\Phi}_1^*(x) - \int\limits_q^1 K^*(x,t)dt \int\limits_q^1 \bar{\Phi}_2^*(s)R_2^*(s,t)ds$$

$$\bar{\Phi}_1^*(x)=\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)-F_1'(x)+\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_{\frac{x+1}{2}}^{1}\tau_1(t)K_1(x,t)\,dt+$$

$$+\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_{q}^{1}\bar{R}_1(x,t)dt\int\limits_{\frac{t+1}{2}}^{1}\tau_1(s)K_1(t,s)\,ds+\int\limits_{q}^{1}\left[\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)-F_1'(t)\right]\bar{R}_1(x,t)dt-$$

$$-\int\limits_{q}^{1}\bar{\Phi}_2^*(t)K^*(x,t)dt$$

Далее, исключив $\nu_2(y)$ из (26) и (61) с учетом (62) получим:

$$\sqrt{|\lambda_2|}\int\limits_{q}^{1}R_2^*(t,y)dt\int\limits_{\frac{t+1}{2}}^{1}\tau_2(s)K_2(t,s)\,ds+\tau_2'(y)-\psi_2'\left(\frac{y+1}{2}\right)=A_1(y)$$

где

$$A_1(y)=B(y)-A(y)+\int\limits_{q}^{1}(B(t)-A(t))\,R_2^*(t,y)dt$$

$$B(y)=\sqrt{|\lambda_1|}\int\limits_{q}^{1}\left(\int\limits_{\frac{t+1}{2}}^{1}\tau_1(s)K_1(t,s)\,ds+\int\limits_{q}^{1}ds\int\limits_{\frac{t+1}{2}}^{1}\tau_1(s)K_1(t,s)\bar{R}_1(s,z)dz\right)\bar{K}_2(y,t)dt$$

Интегрируя обе части полученного равенства от y до 1 и учитывая, что $\tau_2(1)=\psi_2(1)$ получим следующее интегральное уравнение для определения $\tau_2(y)$:

$$\tau_2(y)-\sqrt{|\lambda_2|}\int\limits_{y}^{1}dt\int\limits_{\frac{q+1}{2}}^{1}\tau_2(s)ds\int\limits_{2s-1}^{1}R_2^*(z,t)K_2(z,s)\,dz=2\psi_2\left(\frac{y+1}{2}\right)-\int\limits_{y}^{1}A_1(t)dt-\psi_2(1)$$

т.е.

$$\tau_2(y)-\sqrt{|\lambda_2|}\int\limits_{\frac{q+1}{2}}^{1}\tau_2(s)N(s,y)ds=2\psi_2\left(\frac{y+1}{2}\right)-\int\limits_{y}^{1}A_1(t)dt-\psi_2(1)$$

где $N(s,y)=\int\limits_{y}^{1}dt\int\limits_{2s-1}^{1}R_2^*(z,t)K_2(z,s)\,dz$

После того как найдены $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$, решение задачи I_1 можно восстановить в области Ω_0 как решение задачи N (35), а в областях $\Delta_j (j=1,2)$ как решение задачи Коши-Гурса. **Теорема 2 доказана.** □

Теорема 3. *Если выполнены (9), (11 и (12), то решение задачи I_2 существует и единственно.*

Доказательство. Теорема 3 доказывается аналогично как теорема 2.

Пусть $z(x,y)$ – решение задачи I^*, тогда однозначная разрешимость задачи I^* эквивалентно сведется к однозначной разрешимости задач I_1 и I_2, где неизвестную функцию $\psi_j^*(x)$ $(j=1,2)$ можно определить, склеивая на линии $x+y=0$ решение задачи Гурса в областях D_j и D_j^* с краевыми условиями (7),

$$z(x,y)\Big|_{B_jE_j} = h_j(x) - \omega_j(x)$$

и (8),

$$z(x,y)\Big|_{B_j^*E_j^*} = h_j^*(x) - \omega_j(x),$$

соответственно, где $h_j(x)$ и $h_j^*(x)$ являются следами на $x+y=q$ и $x+y=-q$ решения задач I_1 и I_2 в областях Δ_j и Δ_j^*, соответственно.

Следовательно, в силу (13), (17), (18) и (19) задача I однозначно разрешима. □

Библиографический список

1. Нахушев. А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифф. уравнения. 1976. Т.12. №1. С.103-108.
2. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. №2. С. 230-237.
3. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифф. уравнения. 1978. Т. 14. №1. С.181-184.
4. Казиев В.М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // Дифф. уравнения. 1981. Т.17. №2. С.313-319.
5. Ланин И.Н. Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка // Дифф. уравнения. 1981. Т.17. №1. С.97-106.
6. Исломов Б.И., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // ДАН РУз. 1996. №1. С.3-6.
7. Курязов Д.М. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. // УзМЖ. 1999. №5. С. 40-46.
8. Рамазанов М.И. О нелокальной задаче для нагруженного уравнения гиперболо-эллиптического типа в прямоугольной области // Сибирский математический журнал. 2002. Т.2. № 4. С. 75-81.
9. Хубиев.К.У. Об одной задаче для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа // Доклады АМАН. 2005. Т. 7. №2. С.74-77.
10. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.
11. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. Матем. Института АН СССР. 1953. Т.41.
12. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Нелокальная краевая задача в двусвязной области для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299. №1. С.63-66.
13. Исломов Б., Абдуллаев О.Х. Краевая задача типа задачи Бицадзе для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области // Доклады АМАН. 2004. Т. 7. №1. С.42-46.
14. Мусхелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с

Поступила в редакцию / Original article submitted: 24.04.2014