

УДК 517.956

**ПОСТАНОВКА И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ  
ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА  
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

**М. Мамажонов, С.М. Мамажонов**

Кокандский государственный педагогический университет им. Мукини,  
113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: dpi@quqon.uz

Настоящая работа посвящена изучению методики исследования некоторых краевых задач для одного класса параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка в вогнутой шестиугольной области, которые воспользуется при изучении задач математической физики в магистратуре.

*Ключевые слова: краевые условия, условие склеивания, интегральное уравнение Вольтерра второго рода*

© Мамажонов М., Мамажонов С.М., 2014

MSC 35M13

**STATEMENT AND RESEARCH METHOD SOME BOUNDARY VALUE  
PROBLEMS FOR A CLASS OF FOURTH ORDER  
PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE**

**M. Mamajonov, S.M. Mamajonov**

Kokand State Pedagogical Institute by Mukini, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira  
Temura st. 37

E-mail: dpi@quqon.uz

This paper studies the methods of investigation of some boundary value problems for a class of parabolic-hyperbolic equations of the third order in the hexagonal concave areas that take advantage of the study of problems of mathematical physics in the magistracy.

*Key words: operator boundary conditions, the condition of bonding, Volterra integral equation of the second kind*

© Mamajonov M., Mamajonov S.M., 2014

## Введение

Развитие уравнений в частных производных обусловлено широким кругом прикладных задач в физике, экономике, биологии и в других науках. В рамках теории уравнений математической физики как дисциплины, читаемой в магистратуре, большой интерес представляют уравнения смешанного типа. Такие уравнения могут быть использованы при описании различных физических процессов от пространственных околосвуковых течений идеального политропного газа, гидродинамических течений с переходом через скорость звука до бесконечно малых изгибов поверхностей.

## Постановка задачи

Рассмотрим на плоскости  $xOy$  область  $D$ , где

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup AB \cup AA_0, D_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in R^2 : -1 < y < 0, 0 < x < y + 1\}, AB = \{(x, y) \in R^2 : y = 0, 0 < x < 1\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 0, 0 < y < 1\}, AA_0 = \{(x, y) \in R^2 : x = 0, 0 < y < 1\},$$

т.е.  $D$  – есть шестиугольная область с вершинами в точках  $A(0, 0)$ ,  $C(0, -1)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $B_0(1, 1)$ ,  $D_0(-1, 1)$ ,  $D(-1, 0)$ . Точка  $A_0$  имеет координаты  $A_0(0, 1)$ .

Область  $D_2$  разделим на две части с помощью отрезка

$$AE = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, y = -x \right\}.$$

Тогда область  $D_2$  можно записать в виде

$$D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup D_3 \cup AE,$$

$$D_{21} = \left\{ (x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y + 1 \right\},$$

$$D_{22} = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, x - 1 < y < -x \right\},$$

, а  $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

В области  $D$  рассмотрим уравнение

$$\left( a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) (Lu) = 0, \tag{1}$$

где  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$ ,  $Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y & D_1, \\ L_i u \equiv u_{xx} - u_y & D_i \ (i = 2, 3). \end{cases}$

Перед тем, как приступить к постановке задачи запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые воспользуются при постановке краевой задачи.

Краевые условия:

$$u(1, y) = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq 1, \tag{2}$$

$$u_x(1, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq 1, \tag{3}$$

$$u_{xx}(1, y) = \varphi_3(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (4)$$

$$u(-1, y) = \varphi_4(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

$$u_x(-1, y) = \varphi_5(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

$$u_{xx}(-1, y) = \varphi_6(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (7)$$

$$u(0, y) = \varphi_7(y), -1 \leq y \leq 0, \quad (8)$$

$$u_x(0, y) = \varphi_8(y), -1 \leq y \leq 0 \quad (9)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_9(y), -1 \leq y \leq 0, \quad (10)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_9(y), -\frac{b_2}{a_2} \leq y \leq 0, \quad (11)$$

$$u_{xxx}(0, y) = \varphi_{10}(y), -1 \leq y \leq 0, \quad (12)$$

$$u_{xxx}(0, y) = \varphi_9(y), -\frac{b_1}{a_1} \leq y \leq 0, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (14)$$

$$u_y(x, 0) = f_2(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (15)$$

$$u_{yy}(x, 0) = f_3(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (16)$$

$$u_{yyy}(x, 0) = f_4(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (17)$$

$$u|_{BC} = \psi_1(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

$$u|_{BE} = \psi_1(x), \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_2(x), 0 \leq x \leq 1 \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{BC} = \psi_3(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

Условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x, -0) = u(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (22)$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (23)$$

$$u_{yy}(x, -0) = u_{yy}(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (24)$$

$$u_{yyy}(x, -0) = u_{yyy}(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (25)$$

$$u(-0, y) = u(+0, y), 0 \leq y \leq 1, \quad (26)$$

$$u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \leq y \leq 1, \quad (27)$$

$$u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y), 0 \leq y \leq 1, \quad (28)$$

$$u_{xxx}(-0, y) = u_{xxx}(+0, y), 0 \leq y \leq 1. \quad (29)$$

Здесь  $\varphi_i$  ( $i = \overline{1, 10}$ ),  $\psi_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ),  $f_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – заданные достаточно гладкие функции,  $n$  – внутренняя нормаль к прямой  $x - y = 1$ . В зависимости от коэффициентов  $a_1, b_1, a_2, b_2$  характеристик  $b_1x - a_1y = const$  и  $b_2x - a_2y = const$  операторов  $a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}$  и  $a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}$  уравнения (1) получается очень много случаев, основными которых являются 22 случая, для которых ставятся различные краевые задачи.

Приступим к постановке краевой задачи для уравнения (1).

**Задача** Найти функцию  $u(x, y)$ , которая 1) непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ ; 2) удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); 3) удовлетворяет краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа из таблицы.

В настоящей статье укажем идею решения поставленной задачи лишь в случае 1°. В этом случае уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lu) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$Lu_i = \omega_{i1}(y) \cdot x + \omega_{i2}(y), \quad i = 1, 2, 3,$$

где введено обозначение  $u(x, y) = u_i(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_i$ , а  $\omega_{ij}(y)$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2$ ) – произвольные достаточно гладкие функции, подлежащие определению. Последнее уравнение можно записать в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(y) \cdot x + \omega_{12}(y), \quad (x, y) \in D_1, \quad (30)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(y) \cdot x + \omega_{i2}(y), \quad (x, y) \in D_i \quad (i = 2, 3). \quad (31)$$

В уравнении (31) ( $i = 2$ ) введем обозначения  $u_2(x, y) = u_{2k}(x, y)$ ,  $\omega_{2j}(y) = \omega_{2kj}(y)$  при  $(x, y) \in D_{2k}$  ( $j = 1, 2; k = 1, 2$ ). Тогда уравнение (31) ( $i = 2$ ) имеет вид

$$u_{2kxx} - u_{2kyy} = \omega_{2k1}(y) \cdot x + \omega_{2k2}(y), \quad (x, y) \in D_{2k} \quad (k = 1, 2). \quad (32)$$

Таблица

## Классификация краевых задач

Случаи	Краевые условия	Условия склеивания
1°. $a_1 = a_2 = 1; b_1 = b_2 = 0$	(2), (5)-(7), (14), (15), (18), (20), (21)	(22),(23), (26)-(29)
2°. $a_1 = 1, b_1 = 0; a_2 = 0, b_2 = 1$	(2), (5), (6), (14)-(16), (18), (20), (21)	(22)-(24),(26)-(28)
3°. $a_1 = a_2 = 0; b_1 = b_2 = 1$	(2), (5), (14)-(18), (20), (21)	(22)-(27)
4°. $a_1 = 1, b_1 = 0; 0 < \gamma_2 < 1,$ $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2}$	(2), (5)-(10), (12), (14)- (16) или (2), (5)-(9), (11), (12), (14)-(16)	(22)-(24),(26)-(29)
5°. $a_1 = 1, b_1 = 0; \gamma_2 = 1$	(2), (5) – (10), (12), (14) – (16)	(22)-(24),(26)-(29)
6°. $a_1 = 1, b_1 = 0; 1 < \gamma_2 < +\infty$	(2), (5)-(10), (12), (14)-(16), (20)	(22)-(24),(26)-(29)
7°. $a_1 = 1, b_1 = 0; -\infty < \gamma_2 < 0$	(2)-(5), (14)-(16), (18), (20), (21)	(22)-(24),(26)-(29)
8°. $a_1 = 0, b_1 = 1; 0 < \gamma_2 < 1$	(2), (5), (6), (8), (11), (14)-(17), (19), (20), (21)	(22)-(28)
9°. $a_1 = 0, b_1 = 1; \gamma_2 = 1$	(2), (5), (6), (8)-(10), (14)-(17), (20)	(22)-(28)
10°. $a_1 = 0, b_1 = 1; 1 < \gamma_2 < +\infty$	(2), (5), (6), (8)-(10), (14)-(17), (20), (21)	(22)-(28)
11°. $a_1 = 0, b_1 = 1; -\infty < \gamma_2 < 0$	(2), (3), (5), (14)-(17), (18), (20), (21)	(22)-(28)
12°. $0 < \gamma_1 < 1; 0 < \gamma_2 < 1$ $(\gamma_1 = \frac{b_1}{a_1}, a) \gamma_1 \neq \gamma_2; b) \gamma_1 = \gamma_2$	(2), (5)-(9), (11), (13), (14)-(17), (19), (20), (21)	(22)-(29)
13°. $\gamma_1 = 1; 0 < \gamma_2 < 1$	(2), (5)-(9), (11), (12), (19), (20)	(22)-(29)
14°. $1 < \gamma_1 < +\infty; 0 < \gamma_2 < 1$	(2), (5)-(9), (11), (14)- (17), (19), (20), (21)	(22)-(29)
15°. $-1 < \gamma_1 < 0; 0 < \gamma_2 < 1$	(2), (3), (5), (6), (8), (9), (11),(14)- (17),(19),(20),(21)	(22)-(29)
16°. $\gamma_1 = -1; 0 < \gamma_2 < 1$	(2), (3), (5), (6), (8), (11), (14)-(17), (19), (20)	(22)-(29)
17°. $-\infty < \gamma_1 < -1; 0 < \gamma_2 < 1$	(2), (3), (5), (6), (14)-(18), (20), (21)	(22)-(29)
18°. $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 1$	(2), (5) – (10),(12),(14) – (17)	(22)-(29)
19°. $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = -1$	(2), (3), (5), (6), (8)- (10), (12), (14)-(17)	(22)-(29)
20°. $1 < \gamma_1 < +\infty; 1 < \gamma_2 < +\infty,$ $(a) \gamma_1 \neq \gamma_2; b) \gamma_1 = \gamma_2$	(2), (5)-(10), (12), (14)-(17), (20), (21)	(22)-(29)
21°. $1 < \gamma_1 < +\infty; -\infty < \gamma_2 < 0$	(2), (3), (5), (6), (8), (10), (14)-(17), (19), (20), (21)	(22)-(29)
22°. $-\infty < \gamma_1 < -1; -\infty < \gamma_2 < 0,$ $(a) \gamma_1 \neq \gamma_2; b) \gamma_1 = \gamma_2$	(2)-(5), (14)-(18), (20), (21)	(22)-(29)

Записывая решение уравнения (32) ( $k = 1$ ), удовлетворяющее условиям  $u_{21}(x, 0) = \tau_1(x)$ ,  $u_{21y}(x, 0) = v_1(x)$ , где  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$  – неизвестные пока достаточно гладкие функции, и удовлетворяя условиям (20), (21), получим систему уравнений относительно  $\omega_{211}(y)$  и  $\omega_{212}(y)$ , из которой находим эти функции.

Затем записывая решение уравнения (32) ( $k=2$ ), удовлетворяющее условиям  $u_{22}(0, y) = \tau_3(y)$ ,  $u_{22x}(0, y) = v_3(y)$ , где  $\tau_3(y)$  и  $v_3(y)$  – неизвестные пока достаточно гладкие функции, и удовлетворяя условиям (20), (21), получим систему уравнений относительно  $\omega_{221}(y)$  и  $\omega_{222}(y)$  при  $-1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$ , из которой находим эти функции при  $-1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$ . Для определения этих функций при  $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0$  воспользуемся из условий

$$\left( \frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y} \right) \Big|_{y=-x} = \left( \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y} \right) \Big|_{y=-x},$$

$$\left( \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=-x} = \left( \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=-x}.$$

С помощью этих условий находим функции  $\omega_{221}(y)$  и  $\omega_{222}(y)$  в промежутке  $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0$ .

Затем из гиперболической части и параболической части переходя к пределу, когда  $y \rightarrow 0$  получим две соотношения относительно  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$ , из которых находим эти функции и тем самым – функции  $u_{21}(x, y)$ ,  $\tau_3(y)$ ,  $v_3(y)$ ,  $u_{22}(x, y)$ .

Переходим в область  $D_3$ . Воспользуясь методом продолжения и условиям склеивания из гиперболической части  $D_3$  области  $D$  мы получим три соотношения для определения шести неизвестных функций, когда  $x \rightarrow 0$ . А также, из параболической части  $D_1$  области  $D$  получим еще три соотношения для определения этих функций, когда  $x \rightarrow 0$ . Таким образом, мы получим систему шести уравнений относительно шести неизвестных функций. Исключаем из полученной системы пять из шести неизвестных функций, тогда мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно  $\tau_2''(y)$ , ядро которого имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Решая это уравнение, мы единственным образом находим эту функцию и тем самым – функции  $u_1(x, y)$ ,  $u_3(x, y)$ . Таким образом, мы доказали однозначную разрешимость поставленной задачи в случае  $1^o$ .

В работах [1]-[2] были рассмотрены ряд краевых задач для уравнения (1).

## Библиографический список

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
2. Джураев Т.Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. №1. С. 37-50.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 07.04.2014