Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2012. № 2 (5). С. 33-36. ISSN 2079-6641

УДК 519.86

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ САМУЭЛЬСОНА В МОДЕЛИ ЭВАНСА ОБ УСТАНОВЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ НА РЫНКЕ ОДНОГО ТОВАРА

Шпилько Я.Е., Соломко А.А., Паровик Р.И.

Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1
E-mail: romanparovik@gmail.com

Рассмотрена параметризация уравнения Самуэльсона для модели Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара.

Ключевые слова: уравнение Самуэльсона, модель Эванса, цена, спрос, предложение

© Шпилько Я.Е., Соломко А.А., Паровик Р.И., 2012

MSC 00A71

PARAMETRIZATION SAMUELSON EQUATION MODEL FOR EVANS FIXING, EQUILIBRIUM PRICE OF THE SAME PRODUCT MARKET

Shpilko A.A., Solomko Y.E., Parovik R.I.

Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11/1, Russia
E-mail: romanparovik@gmail.com

We consider the parameterization equations Samuelson of the model Evans establish equilibrium price of the same product market.

Key words: equation Samuelson, model Evans, price, demand and supply

© Shpilko A.A., Solomko Y.E. , Parovik R.I, 2012

Введение

Математическое моделирование экономических процессов, является актуальным направлением исследования, так как от этого зависит благосостояние граждан и страны в целом. В экономике наиболее важны динамические модели, параметры которых изменяются во времени. Это обусловлено тем, что зная динамику интересующего нас экономического параметра можно попытаться построить прогноз его дальнейшей эволюции.

Динамические модели описываются в основном линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с начальными условиями, которые легко решаются известными методами. Как правило, решением таких уравнений, является экспонента с отрицательным или с положительным показателями в зависимости от экономического смысла. Однако появляются математические модели [1], которые в своих уравнениях содержать производные дробных порядков [2], [3]. Мы не будем детально останавливаться на вопросе об экономическом смысле таких дифференциальных операторов, а лишь рассмотрим особенности решения таких уравнений на примере модели Эванса.

Постановка задачи

Рассмотрим рынок одного товара. Введем в рассмотрение следующие определяющие функции $D(t), S(t)$ и $p(t)$, которые в экономике известны как спрос, предложение и цена. Также будем считать, что спрос и предложения линейно зависят от цены согласно уравнениям:

$$D(t) = a_0 - bp(t), \quad S(t) = a_1 + \beta p(t), \quad \alpha, \beta, a, b > 0 \tag{1}$$

Необходимо отметить, что если $p(t) = 0$, то $a > \alpha$, т.е. спрос преобладает над предложением при нулевой цене. В модели Эванса определяющим является изменение цена в зависимости от соотношений между спросом и предложением. Изменение цены во времени t должно быть пропорционально превышению спроса над предложением, т.е. имеет место следующее уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = \lambda\left(D(t) - S(t)\right), \tag{2}$$

здесь $\lambda > 0$ – коэффициент пропорциональности.

Уравнение в нашем случае можно записать в следующем виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\lambda\left((b+\beta)\,p(t) - a_0 + a_1\right) \tag{3}$$

Уравнение (3) называется уравнением Самуэльсона. Для определения константы интегрирования в (3) надо задать начальное условие

$$p(0) = p_0. \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) определяют задачу Коши. Из уравнения (3) легко можно определить равновесную цену ($D = S$), полагая $\frac{dp}{dt} = 0$, приходим к следующему результату:

$$\bar{p} = \frac{a_0 - a_1}{b+\beta} > 0. \tag{5}$$

Равновесная цена (5) обладает свойством таким, что при $p_0>\bar{p}$ цена p возрастает при стремлении к равновесной цене, а при $p_0<\bar{p}$ цена pсоответственно уменьшается. Решение задачи Коши (3), (4) можно найти методом вариации постоянной, что подробно представлено в работе [4]:

$$p(t)=p_0e^{-\lambda(\beta+b)t}+\frac{a_0-a_1}{b+\beta}\left(1-e^{-\lambda(\beta+b)t}\right). \quad (6)$$

В работе [4] показано, что $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\bar{p}$.

Рассмотрим параметризацию модели (3) и (4). Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\alpha}p(\tau)=-\lambda\left((b+\beta)p(t)-a_0+a_1\right),p(0)=p_0,0<\alpha<1. \quad (7)$$

Здесь $\partial_{0t}^{\alpha}p(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{p'(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Герасимова – Капуто [5].

Выбор дифференциального оператора обусловлен следующими причинами: 1) возможность применения начального локального условия (4); 2) производная порядка αот константы равна нулю.

Запишем задачу Коши (7) в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha}p(\tau)=-\lambda(b+\beta)p(t)+\lambda(a_0-a_1),p(0)=p_0,0<\alpha<1. \quad (8)$$

Решение задачи

Решение задачи (8) известно и его можно записать так [3]:

$$\begin{aligned}p(t)&=p_0E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})+\lambda(a_0-a_1)\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda(b+\beta)(t-\tau)^{\alpha}\right)d\tau=\\&=p_0E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})+\lambda(a_0-a_1)\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda(b+\beta)(t-\tau)^{\alpha}\right)d\tau=\\&=p_0E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})+\lambda t^{\alpha}(a_0-a_1)E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})=\\&=p_0E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})+\frac{a_0-a_1}{b+\beta}\left[1-E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})\right]=\\&=p_0E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})+\bar{p}\left[1-E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})\right]=\\&=(p_0-\bar{p})E_{\alpha,1}(-\lambda(b+\beta)t^{\alpha})+\bar{p}.\end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $E_{\alpha,\mu}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(\mu+\alpha k)}$ — функция типа Миттаг-Леффлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

В решении (9) было использовано свойство функции типа Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\mu}(z)=zE_{\alpha,\alpha+\mu}(z)+\frac{1}{\Gamma(\mu)}$.

Надо заметить, что при значении параметра $\alpha=1$ решение с точностью до множителя перейдет в решение (6). Покажем, что решение (9) при $t\to\infty$ стремиться к

(5). Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функции при больших значениях аргумента:

$$E_{\alpha,1}\left(-\lambda\left(b+\beta\right)t^{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}e^{\left[-\lambda\left(b+\beta\right)\right]^{1/\alpha}t},|z|=\left|\lambda\left(b+\beta\right)t^{\alpha}\right|\rightarrow\infty. \quad (10)$$

Тогда подставляя (10) в (9) и при $t\rightarrow\infty$ приходим к пределу $\lim\limits_{t\rightarrow\infty}p(t)=\bar{p}$.

Решение (9) отличается от решения (6) произволом выбора параметра $0<\alpha\leq 1$. В уравнении (7) интеграл со степенным ядром означает довольно хитрое осреднение цены товара по времени или нелокальность по времени. Это дает замедление динамики цены во времени относительно равновесной цены, когда спрос и предложения равны. Такое замедление может быть вызвано какими-нибудь внешними факторами или особенностью монополии.

Библиографический список

1. Нахушева З.А. Об одной односекторной макроэкономической модели долгосрочного прогнозирования // Доклады АМАН. 2012. Т. 14. №1. С. 124-127.

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

3. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

4. Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н., Шуман Г.И. Математическое моделирование экономических процессов и систем. М.: Кнорус, 2011. 200 с.

5. Паровик Р.И. Решение нелокального уравнения аномальной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. №1 (2). С. 37-44.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 27.10.2012