

МАТЕМАТИКА

УДК 512.24

**О ПОДГРУППАХ ПОЧТИ АМАЛЬГАМИРОВАННОГО
ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С КОНЕЧНОЙ
ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ**

А.П. Горюшкин^{1,2}

¹ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

² Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: as2021@mail.ru

Исследуются подгруппы групп, почти разложимых в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой.

Ключевые слова: свободное произведение с объединением, порождающее множество, индекс подгруппы, нормальный делитель.

© Горюшкин А.П., 2012

MATHEMATICA

MSC 18A32

**ON SUBGROUPS OF ALMOST AMALGAMATED FREE
PRODUCT TWO GROUPS WITH FINITE AMALGAMATED
SUBGROUP**

A.P. Goryushkin^{1,2}

¹ Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk Kamchatskiy, Pogranichnaya st, 4, Russia

² Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11 / 1

E-mail: as2021@mail.ru

Subgroups of groups which can be present as almost free product of two groups with finite amalgamated subgroup are studied.

Key words: free product with amalgamation, set of generators, index of a subgroup, normal subgroup.

© Goryushkin A.P., 2012

ВВЕДЕНИЕ

Группа G почти обладает некоторым свойством, если G является конечным расширением группы, обладающей этим свойством.

Например, свободное произведение двух конечных групп является почти свободной группой. Почти свободной группой будет и амальгамированное произведение двух конечных групп с объединенной нормальной подгруппой.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПОЧТИ РАЗЛОЖИМОСТИ

Пусть группа G – почти разложима в амальгамированное произведение, т. е. в группе G есть нормальный делитель N конечного индекса, который является свободным произведением с объединенной подгруппой, $N = A *_U B$, причем подгруппа U имеет индекс больше единицы и в группе A , и в группе B . Предположим дополнительно, что подгруппа U – конечна.

В такой группе G конечным нормальным делителем может быть только подгруппа из U . Более того, каждая конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса вместе со всеми своими сопряжениями, образно выражаясь, «занимает очень мало места», как показывает следующая теорема, являющаяся необходимым условием почти разложимости группы в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой.

Теорема 1. *Если группа G почти разложима в амальгамированное произведение с объединенной конечной подгруппой, и H – произвольная конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в G , то для некоторого элемента w из G множество $wHw^{-1} \cap H$ конечно.*

Доказательство. По условию в G существует нормальный делитель N конечного индекса, причем $N = A *_U B$, где A, B – неединичные группы, а подгруппа U – конечна, и $|A : U| > 1, |B : U| > 1$.

Пусть D – пересечение нормального делителя N и подгруппы H , $D = N \cap H$

Из неравенства $|H : D| \leq |G : N|$ и конечной порожденности H следует, что подгруппа D тоже конечно порождена. Кроме того, из конечности индекса N в G и бесконечности индекса H в G следует, что индекс $|N : D|$ – бесконечен.

Так как объединяемая подгруппа U конечна из бесконечности «обычного» индекса H в G следует бесконечность разложения N по двойному модулю (D, U) .

Итак, D – конечно порожденная подгруппа в группе $N = A *_U B$, и индекс $|N : (D, U)|$ бесконечен. Число двухконцевых двойных смежных классов конечно (см. [1], следствие к лемме 8). Отсюда следует, что существует такой элемент u из N , что все элементы из $uD u^{-1}$ в полуприведенной форме начинаются и заканчиваются A слогом. Точно также найдется такой элемент s из N , что все элементы из sDs^{-1} в полуприведенной форме начинаются и заканчиваются B слогом. Но это значит, что пересечение $uD u^{-1} \cap sDs^{-1}$ целиком содержится в объединяемой подгруппе U .

Пусть $w = us$. Тогда подгруппа $D_1 = wD w^{-1} \cap D$ целиком содержится в $uU u^{-1}$, и поэтому конечна. Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} wHw^{-1} \cap H \cap N &= wHw^{-1} \cap N \cap (H \cap N) = wHw^{-1} \cap wNw^{-1} \cap (H \cap N) = \\ &= w(H \cap N)w^{-1} \cap (H \cap N) = wDw^{-1} \cap D \subset uU u^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, множество $wHw^1 \cap H) \cap N$ содержится в сопряжении объединяемой подгруппы, и поэтому состоит из конечного числа элементов.

Кроме того, индекс $(wHw^1 \cap H) \cap N$ в $(wHw^1 \cap H)$ конечен; а это и означает, что $wHw^1 \cap H$ – конечное множество. Теорема доказана. \square

Следствие 1. Пусть группа G порождается конечным множеством своих подгрупп G_1, G_2, \dots, G_m , причем каждое пересечение $D_{ij} = G_i \cap G_j (i, j \in \{1, 2, \dots, m\})$ – конечно порождено и имеет конечный индекс и в G_i , и в G_j , и хотя бы одна из подгрупп D_{ij} имеет бесконечный индекс в G . Тогда если G – почти разложима в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой, то все подгруппы G_1, G_2, \dots, G_m – конечны.

Доказательство. Предположим, например, что группа G_1 бесконечна. Следовательно, D_{1k} – тоже бесконечны для всех $k = 2, 3, \dots, m$, и, следовательно, бесконечны и все остальные подгруппы G_k . Покажем, что тогда необходимое условие почти разложимости в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой для группы G не выполняется.

В качестве контрпримера – подгруппы H , опровергающей утверждение теоремы 1 о свойствах конечно порожденных подгруппах почти разложимых групп, возьмем пересечение $G_i \cap G_j$, имеющее бесконечный индекс в G , $H = G_i \cap G_j$.

Так как $G = gp(G_1, G_2, \dots, G_m)$, произвольный элемент w из G является словом, слогами которого являются элементы g_i , выбранные из G_i . Индукцией по числу этих слогов в представлении w получаем, что пересечение $wHw^1 \cap H$ имеет конечный индекс во всех подгруппах G_k . Поэтому для любого элемента w из G пересечение $wHw^1 \cap H$ состоит из бесконечного числа элементов. Утверждение доказано. \square

Непосредственно из этого получается следующее утверждение.

Следствие 2. Свободное произведение $A *_U B$, где подгруппа U – конечно порождена и имеет конечный неединичный индекс в каждом сомножителе, является почти свободным произведением с объединенной конечной подгруппой тогда и только тогда, когда группы A, B – конечны.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ ИНДЕКСА ПОДГРУППЫ

Для каждой конечно порожденной подгруппы H бесконечного индекса в свободном произведении найдется нетривиальный нормальный делитель группы, имеющий с H единичное пересечение ([2], глава I, §7).

Свободное произведение групп является частным случаем обобщенного свободного произведения – объединяемая подгруппа в свободном произведении единична, и в частности – конечна.

Оказалось, что вместо слов «свободное произведение» можно говорить почти разложимая в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой.

Теорема 2. Если H – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в почти свободном произведении двух групп и с объединенной конечной подгруппой, то существует такой неединичный нормальный делитель S группы что пересечение $H \cap S$ – единично.

Доказательство. По условию в нашей группе существует нормальный делитель G конечного индекса, причем $G = A *_U B$, где A, B – неединичные группы, а подгруппа U – конечна. Разложимость должна быть нетривиальна, т. е. индекс U в каждом из

множителей должен быть больше единицы. Если он конечен в каждой из подгрупп, то G является почти свободной группой, а для почти свободных групп утверждение теоремы 2 верно. Поэтому можно считать, что по крайней мере один из индексов (а следовательно, и один из множителей) бесконечен.

Рассуждая далее точно так же, как в начале доказательства теоремы 1, видим, что достаточно доказать утверждение теоремы 2 для группы G .

Итак, пусть конечно порожденная подгруппа H содержится в группе G и имеет в ней бесконечный индекс. Объединяемая подгруппа конечна, поэтому разложение группы G по двойному модулю (H, U) тоже бесконечно. Из конечной порожденности H следует, что число двухконцевых смежных классов HgU конечно, и следовательно, существуют одноконцевые смежные классы.

Из конечности объединяемой подгруппы следует, что и число правых смежных классов Hg_i , $i \in I$, тоже конечно. Используя множество всех L левых сегментов всех элементов из H , получаем, что некоторое сопряжение $g_i^{-1}Hg_i$ подгруппы H с помощью представителя g_i двухконцевого смежного класса является одноконцевым (причем длина элементов из подгруппы $g_i^{-1}Hg_i$ не ограничена).

Пусть z – произвольный элемент из G , который начинается A -слогодом, а заканчивается B -слогодом. Тогда все элементы из множества

$$\{z^{-1}w^{-1}g_i^{-1}Hg_iwz \mid i \in I\}$$

оканчиваются только на B -слогодомы. Кроме того, для каждого неединичного элемента h из H верно неравенство $l(z^{-1}w^{-1}g_i^{-1}hg_iwz) > l(z)$.

Если теперь выбрать z так, чтобы $l(z) > l(w)$, то для каждого неединичного элемента a из свободного множителя A выполнится неравенство $l(\omega zaz^{-1}w) > l(z) - l(w)$.

Следовательно, существует такой элемент w из группы G , что:

- а) все элементы из множества $\{w^{-1}g_i^{-1}Hg_iw \mid i \in I\}$ оканчиваются только на B -слогодомы;
- б) $\min\{l(waw^{-1}), l(w^{-1}g_i^{-1}hg_iw)\} > \max\{l(g_i^{-1}g_j)\}$ для любых $i, j \in I$, h из $H \setminus U$, a из $A \setminus U$;
- в) $l(waw^{-1}) > \max\{l(g_i) \mid i \in I\}$.

Если w обладает свойствами а и б и a – произвольный неединичный элемент из A , то элемент $x = waw^{-1}$ не принадлежит множеству $\{g_i^{-1}Hg_j \mid i, j \in I\}$. Предположим, что существует элемент h и индексы i, j такие, что $x = g_i^{-1}hg_j$. Ввиду условия б $h \notin U$. Из этого равенства следует $g_i^{-1}g_j = g_i^{-1}hg_i^waw^{-1} = w(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_iwa)w^{-1}$.

Элемент $w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^w$ оканчивается на B -слогодом, поэтому

$$l(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^wa) > l(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^w)$$

Кроме того, элемент $w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^wa$ является строго циклически приведенным, и, следовательно, для каждого элемента g из G выполняется неравенство

$$l(g^{-1}w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^wag) \geq l(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^wa).$$

Таким образом, получаем, что

$$l(g_i^{-1}g_j) = l(g_i^{-1}h^{-1}g_i^waw^{-1}) \geq l(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^wa) > l(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^w) > l(g_i^{-1}g_j).$$

Полученное противоречие означает, что предположение о том, что элемент x принадлежит множеству $\{g_i^{-1}Hg_j \mid i, j \in I\}$, неверно: элемент g_ix несравним с g_j по модулю H для всех $i, j \in I$.

Возьмем w в выражении $x = waw^1$, удовлетворяющим условиям a, b, c .

Тогда для каждого i из I элемент g_ix оканчивается на такой же слог, что и элемент x . Пусть для определенности элемент x оканчивается на A -слог.

Каждый правый смежный класс Hg_ix содержит элемент, оканчивающийся на A -слог. Кроме того, смежный класс Hg_ix – одноконцевой, так как он не входит в множество M , а множество M содержит все двухконцевые правые смежные классы по H .

Это значит, что все элементы из Hg_ix оканчиваются только на A -слоги. Следовательно, и все элементы из Mx оканчиваются тоже только на A -слоги, а так как M содержит L , то и все элементы из Lx оканчиваются на A -слоги, и ни один элемент из U не попал в Lx . Следовательно, элемент x^{-1} не является правым сегментом никакого элемента из L .

Первый слог x^{-1} является обращением последнего слога элемента x , откуда следует, что элемент q оканчивается на B -слог. Но тогда $yx = q$ – элемент из Lx , оканчивающийся на B -слог; получили противоречие.

Таким образом, элемент x^{-1} не является правым сегментом никакого элемента из L . Это означает, что x^{-1} не может быть внутренним сегментом никакого элемента h из H . Другими словами, для каждой конечно порожденной подгруппы H бесконечного индекса в G найдется такой элемент w_0 , который не содержится в качестве внутреннего сегмента ни в одном из элементов из подгруппы H .

Теперь покажем, что для любого элемента w_0 из группы $G = A *_U B$, где подгруппа U – конечна, найдется нормальный такой делитель S группы G , что каждый неединичный элемент из S содержит в своей нормальной форме в качестве сегмента элемент w_0 .

Для этого воспользуемся методом малых сокращений для амальгамированных свободных произведений (см., например: [3], гл. V, раздел 11). Чтобы построить требуемый нормальный делитель S , достаточно указать такое симметризованное множество R , удовлетворяющее условию $C' \left(\frac{1}{6} \right)$, что левая половина каждого элемента из R содержит в качестве внутреннего сегмента наперед заданный элемент w_0 .

Условие $C' \left(\frac{1}{6} \right)$ означает, что для различных элементов r_1 и r_2 из R , имеющих приведенные формы $r_1 = xy_1$ и $r_2 = xy_2$, выполняется неравенство $l(x) < \frac{\bar{l}(x)}{6}$. Пусть w – элемент из G , имеет приведенную форму $w = a_1b_1sa_2b_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2 – элементы из $A \setminus U, B \setminus U$ соответственно, а элемент s содержит элементы w_0 и w_0^{-1} в качестве внутренних сегментов. Предположим, кроме того, что $l(w) \geq 15$.

Так как, по крайней мере, один из индексов подгруппы U в группах A, B бесконечен, а другой индекс не меньше двух, элемент w можно выбрать таким образом, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2 и их участвуют в образовании элемента w в точности один раз.

Рассмотрим теперь симметризованное множество R , порожденное элементом w^7 . Множество R состоит из всех циклически приведенных сопряжений элементов w^7 и w^{-7} . Каждый элемент r из R можно представить в виде $r = x^{-1}w_1x$, где w_1 – цикли-

ческая перестановка элемента w^7 или w^{-7} , а x - элемент из свободного множителя A или B .

Если $x \notin U$, то $r = x^1 u_1 x$ является полуприведенной формой элемента r . Поэтому приведенная форма элемента r из R , отличного от u и u^1 , имеет вид $r = (w_2 w^6 w_1)^\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$, а $w = w_1 w_2$ - полуприведенная форма элемента w . Если $r = w$ или w^{-7} , то получим разложение для элемента r полагая $w_1 = 1$ если $\varepsilon = 1$, и $w_2 = 1$, если $\varepsilon = -1$.

Таким образом, в приведенной форме элемента r , если $\varepsilon = 1$, то $l(w) \geq 1$ и w_2 заканчивается B -слогод; если $\varepsilon = -1$, то $l(w) \geq 1$ и элемент w_1^{-1} заканчивается A -слогод. В любом случае $l(w_1) \leq l(w)$ и $l(w_1) \leq l(w)$. Кроме того, для каждого элемент r из R выполняется равенство $\bar{l}(r) = 7 \cdot l(w)$, и поэтому $l(w) + 2 < \frac{1}{6} \bar{l}(r)$.

Левая половина каждого элемент из R содержит элемент w_0 по построению R . Отсюда следует, что, что множество R удовлетворяет условию $C' \left(\frac{1}{6} \right)$, и поэтому каждый элемент из S - нормального замыкания множества R содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R , которая содержит внутри себя элемент w_0 . Теорема 2 доказана. \square

Доказанное утверждение означает, в частности, что достаточным условием конечности порожденной подгруппы H почти амальгамированного произведения G двух групп с конечной объединенной подгруппой является не тривиальность пересечения H с любым неединичным нормальным делителем группы G .

Заключение

Убрать условие конечности для объединяемой подгруппы в формулировке теоремы 2 нельзя. Даже в случае, когда множители являются свободными группами, амальгамированное произведение свободных групп может оказаться простой группой. В таком случае, естественно, что о никаких нормальных делителях, лежащих вне конечно порожденной подгруппы, речь уже идти не может.

Библиографический список

1. Karrass A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. - 1970 - V.150 - P. 227-255.
2. Горюшкин А.П. Группы, разложимые в свободное произведение (строение и применение), Palmarium Academic Publishing, Саарбрюккен, 2012. - 142 с.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. - М., Мир, 1980. - 448 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 15.05.2012