


ФИЗИКА

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230>

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.21, 517.9, 539.1, 539.3, 544.015, 544.034, 550.34



## Аномальная диффузия с памятью в теории критичности

*Б. М. Шевцов\**, *О. В. Шереметьева*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

**Аннотация.** Рассматривается применение эрдитарной аномальной диффузии в теории критических явлений. Режимы процесса исследуются в зависимости от параметров дробности производных исходного диффузионного уравнения. Критические индексы, определяющие смену режимов процесса, находятся из условий обращения в бесконечность статистических моментов степенного пространственно-временного распределения диффузионного процесса. Смену режимов процесса в зависимости от критических индексов можно рассматривать как последовательность фазовых переходов. Показана связь дробных производных и критических индексов процесса с его фрактальной размерностью, которой определяются эволюция моментов и связанная с ней классификация типов эрдитарной и аномальной диффузии. Сделано заключение о том, что особенности аномальных явлений обусловлены пространственно-временной дисперсией и резонансными эффектами, определяемыми свойствами степенных пространственно-временных распределений диффузионного процесса. С этим связана и структурная перестройка процесса, и перенормировка его источников. Обсуждаются смены режимов диффузионного процесса, при которых дробная диффузия переходит в адвекцию или волной процесс. Предложено обобщение эрдитарной аномальной диффузии на случай степенной нестационарности и пространственной неоднородности процесса. Представленную модель дробной диффузии можно использовать для описания режимов активизации и замирания деформационных процессов, сопровождаемых генерацией акустической и электромагнитной эмиссии.

*Ключевые слова:* эрдитарная аномальная диффузия, теория критичности, случайные процессы, дробные производные, критические индексы, резонансы, перенормировка заряда, фазовые переходы, аномальные явления.

Получение: 09.11.2024; Исправление: 18.11.2024; Принятие: 26.11.2024; Публикация онлайн: 28.11.2024

*Для цитирования.* Шевцов Б. М., Шереметьева О. В. Аномальная диффузия с памятью в теории критичности // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 49. № 4. С. 220-230. EDN: PVYICK. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230>.

**Финансирование.** Работа выполнена за счёт Гос. задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2)

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

\***Корреспонденция:**  E-mail: [bshev@ikir.ru](mailto:bshev@ikir.ru)


Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Шевцов Б. М., Шереметьева О. В., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



PHYSICS

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230>

Research Article

Full text in Russian

MSC 60K50



## Anomalous Diffusion with Memory in Criticality Theory

*B. M. Shevtsov\**, *O. V. Sheremetyeva*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS  
684034, Kamchatka Krai, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

**Abstract.** The application of the hereditary anomalous diffusion in the theory of critical phenomena is considered. The process modes are investigated depending on the fractional parameters of the derivatives of the initial diffusion equation. The critical indices determining the changes of the process modes are found from the conditions of circulation to infinity of the statistical moments of the power-law space-time distribution of the diffusion process. The changes of process modes depending on the critical indices can be considered as a sequence of phase transitions. The relationship of fractional derivatives and critical indices of the process with its fractal dimension is shown, which determines the evolution of moments and the associated classification of types of hereditary anomalous diffusion. It is concluded that the features of anomalous phenomena are due to spatiotemporal dispersion and resonant effects determined by the properties of power-law spatiotemporal distributions of the diffusion process. This is connected with the structural restructuring of the process and the renormalization of its sources. The changes in the modes of the diffusion process, in which fractional diffusion turns into advection or wave process, are discussed. A generalization of the hereditary anomalous diffusion is proposed for the case of power-law nonstationarity and spatial heterogeneity of the process. The presented fractional diffusion model can be used to describe the modes of activation and fading of deformation processes accompanied by the generation of acoustic and electromagnetic emissions.

*Key words:* hereditary anomalous diffusion, criticality theory, random processes, fractional derivatives, critical indices, resonances, charge renormalization, phase transitions, anomalous phenomena.

Received: 09.11.2024; Revised: 18.11.2024; Accepted: 26.11.2024; First online: 28.11.2024

**For citation.** Shevtsov B. M., Sheremetyeva O. V. Anomalous diffusion with memory in criticality theory. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 49: 4, 220-230. EDN: PVYICK. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230>.

**Funding.** The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (subject registration No. 124012300245-2)

**Competing interests.** The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

\*Correspondence:  E-mail: bshev@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Shevtsov B. M., Sheremetyeva O. V., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



## Введение

Понятие критических явлений как аномалий, наблюдаемых в фазовых переходах, стало использоваться в исследованиях процессов пластических деформаций, разрушений, турбулентности, распространения волн в резонансных средах и т.д., общие свойства которых – нелинейность, резонансный характер и скейлинг (масштабная инвариантность, свойственная фрактальным средам). Понятие аномалий используется также в теории катастроф и физике предвестников землетрясений, в которых внезапные изменения состояний очень похожи на фазовые переходы. В связи с расширением понятия критических явлений, их методы исследования требуют обобщений и развития.

Критические явления в квантовых системах имеют многочисленные классические аналоги. Для их описания с учетом масштабной инвариантности используются статистические, дробные и фрактальные подходы. Исследуется роль эффектов памяти, пространственной дисперсии, нестационарности и неоднородности процессов. Большое внимание уделяется резонансным эффектам.

Скейлинг играет очень важную роль в формировании критических явлений. Но, как было показано на примере процесса Пуассона [1], не менее важную роль играют свойства памяти процесса. На ряду с этим представляет интерес исследовать роль пространственных эффектов, т.е. пространственной дисперсии (нелокальности). Это можно сделать на примере аномальной диффузии [2, 3], которая обладает пространственной дисперсией, а в более общем случае и свойствами памяти.

Аномальная диффузия используется для статистического писания систем вблизи фазового перехода [4] и адвекции частиц в конвективных течениях [5]. В [6] вместо термина аномальной диффузии используется понятие "странная кинетика особенности которой, называемые полетами Леви, рассматривались в [7–10]. Целью наших исследований будут критические режимы и индексы этого процесса, ответственные за возникновение аномальных явлений.

## Аномальная диффузия с памятью

Уравнение эредитарной и аномальной диффузии [2] для функции плотности вероятности  $P(x, t)$  записывается в дробных производных Римана-Лиувилля следующим образом:

$$\frac{\partial^\beta P(x, t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial x^\alpha}, \quad P(x, t)|_{t=0} = \delta(x), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (1)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $D$  – коэффициент диффузии.

При  $0 < \alpha \leq 1$  уравнение (1) переходит в уравнение адвекции. Предполагая смену типа волновых движений при значении параметра дробности  $\alpha = 1$ , будем полагать  $0 < \alpha \leq 2$ . Этот случай интересен тем, что значение  $\alpha = 1$  является критическим. Другой случай, когда имеют место одновременно диффузия и адвекция, будет рассмотрен отдельно.