

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.87:517

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ ВОЛН В СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

© 2014 г. А. С. Пережогин, Б. М. Шевцов

Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

Российская Федерация, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: alexeyperzhogin@gmail.com

Поступила в редакцию 24.11.2012 г.

Получены численные и аналитические решения задачи отражения волн в одномерной однородной среде с частотной фрактальной дисперсией на основе метода инвариантного погружения с учетом эффектов многократного рассеяния и долговременной памяти. В качестве характеристик среды использованы решения уравнений дробного релаксатора и осциллятора. Рассмотрены особенности отражений при различных фрактальных свойствах дисперсии. Обсуждаются возможности применения полученных решений в диагностике диэлектриков, плазмы и упругих тел.

DOI: 10.7868/S0033849414010100

ВВЕДЕНИЕ

В связи с необходимостью развития методов дистанционного зондирования сред с фрактальными свойствами [1] представляет интерес получить решения волновой задачи нестационарных отражений с учетом многократного рассеяния и эффектов памяти. Эти решения могут найти применение в диагностике нелокальных процессов в диэлектриках, плазме и упругих телах.

Получить решение нестационарной задачи отражения с учетом процессов многократного рассеяния волн и реакции среды можно с помощью метода инвариантного погружения [2, 3], а для представлений отклика среды можно воспользоваться моделями степенной релаксации [4–6] или дробных осцилляций [6–8]. Ниже будут рассматриваться отражения электромагнитных волн, однако полученные решения могут быть без особых изменений использованы и в акустике фрактальных сред.

В случае достаточной протяженности среды будут сказываться одновременно эффекты медленной степенной релаксации и многократного рассеяния. Исследованию специфики возникающих при этом отражений, представляющих интерес для развития методов дистанционного зондирования, и посвящена данная работа.

1. ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

А. Задача отражения

В одномерном случае уравнения Максвелла для электрических $E_x = E(z, t)$ и магнитных $H_y = H(z, t)$

компонент полей с учетом временной дисперсии будут иметь вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial z} H(z, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(E(z, t) + \kappa(z) \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \xi) E(z, \xi) d\xi \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H(z, t),$$

где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума, $\kappa(z)$ — относительная диэлектрическая восприимчивость среды, $f(t)$ — характеристическая функция среды, форма ее отклика от воздействия дельта-импульсом электрического поля. При большой толщине слоя начинают сказываться эффекты многократного рассеяния, которые проявляются в том, что отраженный средою сигнал отличается от $f(t)$.

В случае среды без дисперсии характеристическая функция принимает вид дельта-функции $f(t) \rightarrow \delta(t)$, а электрическая индукция $D \rightarrow \varepsilon(1 + \kappa(z))E = \varepsilon_0 \varepsilon(z)E$, где $\varepsilon(z) = 1 + \kappa(z)$ — относительная диэлектрическая проницаемость среды. Для упрощения магнитные дисперсионные эффекты не учитываются.

Рассмотрим задачу о падении волны справа на слой однородной среды, расположенный в области пространства $0 < z < L$. Для коэффициента отражения монохроматической волны от

слоя $R(\tau, \omega)$ можно получить уравнение Риккати [3]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} R(\tau, \omega) = -\frac{i\omega}{2}(\kappa(\tau)f(\omega))(R(\tau, \omega) + 1)^2 - 2i\omega R(\tau, \omega). \quad (2)$$

Обратное преобразование Фурье $R(\tau, \omega)$ – волна $R(\tau, t)$, отраженная от слоя среды в случае падающего дельта-импульса, которая называется ядром оператора рассеяния назад. Уравнение для $R(\tau, t)$ можно получить из (2).

Если в нем перейти к удвоенному времени прохода $\chi(z) = 2\tau(z)$ и сделать подстановки $R(\chi, t) = \theta(t)\tilde{R}(\chi, t)$ и $f(t) = \theta(t)\tilde{f}(t)$ ($\theta(t)$ – тета-функция), то для величины $\tilde{R}(\chi, t)$ найдем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{R}(\chi, t) = & -\frac{\kappa(\chi)}{4}[\tilde{f}(0) \int_0^t \tilde{R}(\chi, t - \xi)\tilde{R}(\chi, \xi)d\xi + \\ & + \int_0^t \tilde{f}'(t - \xi) \int_0^\xi \tilde{R}(\chi, \xi - \eta)\tilde{R}(\chi, \eta)d\eta d\xi + \\ & + 2\tilde{f}(0)\tilde{R}(\chi, t) + 2 \int_0^t \tilde{f}'(t - \xi)\tilde{R}(\chi, \xi)d\xi + \tilde{f}'(t)] \end{aligned} \quad (3)$$

с граничным условием $\tilde{R}(\chi, 0) = -\frac{\kappa(\chi)}{4}\tilde{f}(0)$.

Если $f(t) \rightarrow \delta(t)$, что соответствует исчезновению эффектов памяти, то в случае однородного слоя, в котором $\kappa = \text{const} \neq 0$, правая часть уравнения (3) не стремится к нулю, поскольку остаются многократные отражения волны от границ слоя. Такие отражения не представляют интереса и могут быть исключены из рассмотрения с помощью формул Френеля [3].

Б. Случай отражения от полупространства

В задаче отражения от однородного слоя, в котором $\kappa(\tau) = \text{const}$, можно выполнить переход к полупространству, предполагая, что существует решение уравнения (2), стационарное по τ .

Приравняв в (2) нулю значение $\frac{\partial}{\partial \tau} R(\tau, \omega)$, получим уравнение для коэффициента отражения $R(\omega)$, решение которого будет иметь вид:

$$R(\omega) = \frac{-i\omega(\kappa f(\omega) + 2) \pm 2\sqrt{-\omega^2(\kappa f(\omega) + 1)}}{i\omega\kappa f(\omega)}. \quad (4)$$

Затухающему отражению соответствует знак плюс. Волна $R(t)$ – ядро оператора рассеяния назад от полупространства – будет рассмотрено ниже.

В. Численная схема решения задачи отражения

Численную схему для уравнения (3) с граничным условием можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{R}(\chi_n, t_i) - \tilde{R}(\chi_{n-1}, t_{i-1})}{\sqrt{2}\Delta t} = & -\frac{\kappa(\chi_n)}{4}[\tilde{f}(0) \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{R}(\chi_{n-1}, t_{i+1-j}) \times \\ & \times \tilde{R}(\chi_{n-1}, t_j)\Delta t - \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{f}'(t_{i+1-l}) \sum_{j=1}^l \tilde{R}(\chi_{n-1}, t_{i+1-j}) \times \\ & \times \tilde{R}(\chi_{n-1}, t_j)\Delta t^2 - \tilde{f}(0)\tilde{R}(\chi_{n-1}, t_{i-1}) - \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{f}'(t_{i+1-j})\tilde{R}(\chi_{n-1}, t_j)\Delta t - \tilde{f}'(t_{i-1})], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{R}(\chi_n, 0) = -\frac{\kappa(\chi_n)}{4}\tilde{f}(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, Δt – шаг по χ или t (их совпадение следует из равенства единице скорости переноса), $n = 1, 2, \dots, N$, N – число шагов в слое. Результатом расчета данной схемы будет треугольная матрица $\tilde{R}(\chi_n, t_i)$ ($i \leq n$), последний столбец которой $n = N$ и будет искомым отражением среды при падении на нее дельта-импульса.

2. МОДЕЛИ СРЕДЫ С ДРОБНОЙ ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Начнем с известной релаксационной модели Коула–Коула для диэлектриков [4-6]:

$$(1 + \tau_0^\alpha D_0^\alpha)P(t) = \kappa E(t), \quad (6)$$

где $D_0^\alpha[g(\xi)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\xi)d\xi}{(t-\xi)^\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования, $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция, κ – относительная диэлектрическая восприимчивость, $P(t)$ – поляризация, $E(t)$ – напряженность электрического поля, τ_0 – временной масштаб, который только в случае $\alpha = 1$ (экспоненциальной релаксации Дебая) приобретает смысл времени релаксации. Если $0 < \alpha < 1$, то решением (6) будет степенная релаксация, для которой понятие среднего времени релаксации не определено, поскольку его вычисление приводит к расходимости интеграла.

Подстановкой $P(t) = \kappa(1 + \tau_0^\alpha D_0^\alpha)^{-1}E(t)$ в (1) получаем волновое уравнение для среды с релаксацией. В предельных случаях ее отсутствия ($\tau_0 \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow 0$), соответствующих невосприимчивому диэлектрику, различия в результатах не возникают, если τ_0 поменять на $\hat{\tau}_0 = \tau_0/\alpha$, что согласуется с определением фрактала, которое связано с понятием сжимающего отображения временного интервала Δt на себя, при этом α является параметром сжатия, а кратность отображения определяет масштабный интервал.

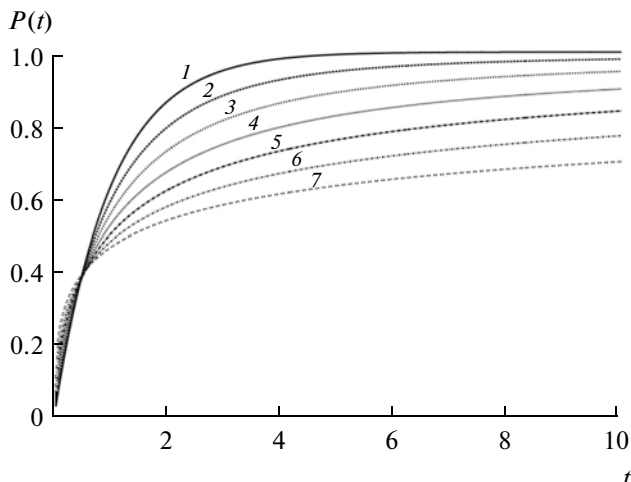


Рис. 1. Рост поляризации после включения электрического поля в модели Коула–Коула при $\alpha = 1.0$ (1), 0.9 (2), 0.8 (3), 0.7 (4), 0.6 (5), 0.5 (6), 0.4 (7).

Рассмотрим возможность дробной релаксации в плазме. Для описания усредненного движения электрона во внешнем электрическом поле с учетом эффектов аномальной релаксации можно воспользоваться уравнением [6–8]:

$$\ddot{P}(t) + \left(\frac{1-\alpha}{\tau_\alpha}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{P(\xi)d\xi}{(t-\xi)^\alpha} = \omega_p^2 E(t), \quad (6a)$$

где ω_p – плазменная частота, α – показатель дробности, $0 < \alpha < 1$, $\tau_\alpha/(1-\alpha)$ – нормированный временной масштаб. Относительно $\dot{P}(t)$ (6a) – обобщенное уравнение Ланжевена, которое при $\alpha = 0$ переходит в обычное. Случай $\tau_\alpha \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow 1$ соответствует плазме без столкновений.

Для описания аномальных колебаний электрона, которые могут быть обусловлены фрактальными флуктуациями его связи с атомом, можно воспользоваться уравнением дробного осциллятора [6–8]:

$$\ddot{P}(t) + \left(\frac{1-\beta}{\tau_\beta}\right)^{2-\beta} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{P(\xi)d\xi}{(t-\xi)^\beta} = \omega_p^2 E(t), \quad (6b)$$

где β – фрактальный параметр, $0 < \beta < 1$, $\tau_\beta/(1-\beta)$ – нормированный временной масштаб, соответственно ему $\hat{\nu}_\beta = (1-\beta)/\tau_\beta$ – частота релаксационных дробных колебаний.

Параметры α , $\tau_\alpha/(1-\alpha)$ и β , $\tau_\beta/(1-\beta)$ являются характеристиками двух дробных релаксационных процессов различного целого порядка. Если оба процесса дают вклад в отклик среды, то их необходимо одновременно учитывать в уравнении для поляризации среды.

Статистической моделью аномальной релаксации для всех рассмотренных выше случаев может служить дробный пуассоновский процесс [9–10].

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СРЕДЫ

Решением (6) в области $t > 0$, если $E(t) = \theta(t)$, где $\theta(t)$ – тета-функция, будет [4]

$$P(t)|_{E(t)=\theta(t)} = \kappa \left(\frac{t}{\hat{\tau}_0}\right)^\alpha E_{1/\alpha} \left(-\left(\frac{t}{\hat{\tau}_0}\right)^\alpha; 1+\alpha\right), \quad (7)$$

где $E_{1/\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}$ – функция типа Миттаг–Леффлера, $\hat{\tau}_0 = \tau_0/\alpha$.

Это решение с ростом t стремится к единице, экспоненциально в случае $\alpha = 1$ и степенным образом, если $0 < \alpha < 1$ (рис. 1).

Характер решения, представленного на рис. 1, говорит о том, что модель Коула–Коула (6) на самом деле описывает возбуждение поляризации в диэлектрике, который оказывает сопротивление воздействию на него тэта-импульсом. Поэтому закрепленное за этой моделью название релаксатора не совсем оправданно. При уменьшении α сопротивление воздействию на больших временах возрастает, а на малых масштабах убывает. В частотном представлении, разумеется, все наоборот.

Фундаментальное решение или функция Грина оператора в левой части (6) получается дифференцированием выражения (7), которое для значений $t > 0$ дает [11]

$$P(t)|_{E(t)=\delta(t)} = \kappa \frac{1}{\hat{\tau}_0} \left(\frac{t}{\hat{\tau}_0}\right)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left(-\left(\frac{t}{\hat{\tau}_0}\right)^\alpha, \alpha\right). \quad (8)$$

На рис. 2 представлено решение (8) при различных значениях параметра дробности α .

Решение (8) имеет степенной характер, его поведение в нуле определяется параметрами среды и в дробном случае сингулярное, этим оно и отличается от релаксации Дебая, $\alpha = 1$.

В предельном случае быстрой релаксации, когда $\tau_0 \rightarrow 0$ при любом α , $P(t)|_{E(t)=\theta(t)} \rightarrow \kappa\theta(t)$ и $P(t)|_{E(t)=\delta(t)} \rightarrow \kappa\delta(t)$. Это приводит к отсутствию дисперсии.

Решения уравнений (6a) и (6b), если $E(t) = \delta(t)$, также определяют поляризацию $P(t)|_{E(t)=\delta(t)} = \kappa f(t)$ в случае отклика среды на воздействие дельта-импульсом.

Используя закон композиции операторов дробного дифференцирования, с учетом начального условия $P(0) = 0$ выполним в (6a) замену переменных $D^{\alpha+1}P(t) = D^\alpha \dot{P}(t) = D^\alpha V_p(t)$, где $V_p(t) = \dot{P}(t)$ – скорость изменения поляризации, $0 < \alpha < 1$.

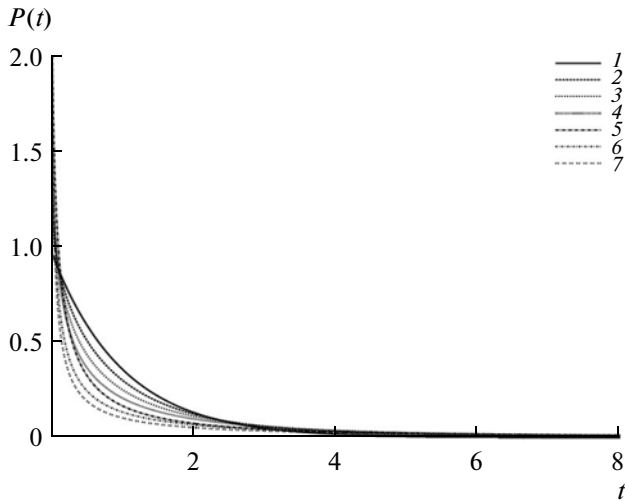


Рис. 2. Поляризация $P(t)|_{E(t)=\delta(t)}$ в модели Коула–Коула при $\alpha = 1.0$ (1), 0.9 (2), 0.8 (3), 0.7 (4), 0.6 (5), 0.5 (6), 0.4 (7).

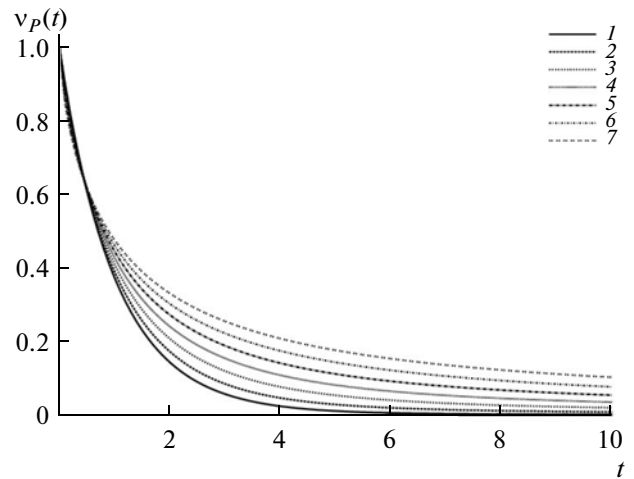


Рис. 3. Зависимость $v_p(t)$ в случае дробной релаксации при $\alpha = 0.01$ (1), 0.05 (2), 0.1 (3), 0.15 (4), 0.2 (5), 0.25 (6), 0.3 (7).

Запишем уравнение для относительной скорости изменения поляризации $v_p(t) = V_p(t)/\omega_p^2$, полагая в правой части выражения (6а) $E(t) = \delta(t)$:

$$\dot{v}_p(t) + \left(\frac{1-\alpha}{\tau_\alpha}\right)^{1-\alpha} D_{0+}^\alpha v_p(t) = \delta(t). \quad (9)$$

Поиск решения данного уравнения с учетом условия $v_p(t) = 0$ при $t < 0$ сводится в области $t > 0$ к задаче с начальными данными $v_p(0) = 1$. Найти решение (9) нетрудно с помощью интегрального преобразования.

Лаплас-образ функции $v_p(t)$ можно записать в виде

$$v_p(p) = \frac{\hat{\tau}_\alpha}{\hat{\tau}_\alpha p + (\hat{\tau}_\alpha p)^\alpha} = \frac{\hat{\tau}_\alpha}{\hat{\tau}_\alpha p(1 + (\hat{\tau}_\alpha p)^{\alpha-1})} = p^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{\tau}_\alpha p)^{(\alpha-1)n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{\tau}_\alpha)^{(\alpha-1)n} (p)^{(\alpha-1)n-1}, \quad (10)$$

где $\hat{\tau}_\alpha = \tau_\alpha/(1-\alpha)$ – нормированный масштаб времени.

Согласно (10), оригиналом функции $v_p(p)$ будет

$$v_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma((1-\alpha)n+1)} \left(\frac{t}{\hat{\tau}_\alpha}\right)^{(1-\alpha)n} = E_{1/(1-\alpha)}\left[-\left(\frac{t}{\hat{\tau}_\alpha}\right)^{1-\alpha}; 1\right]. \quad (11)$$

На рис. 3 представлено решение (11) при различных значениях показателя дробности α и $\tau_\alpha = 1$.

Согласно рис. 2, на больших временных масштабах дробная релаксация замедляется по отно-

шению к релаксации Дебая, и это отличие растет с увеличением параметра α . Замедление релаксации на больших временных масштабах означает, что проводимость плазмы на низких частотах возрастает.

Найдем теперь зависимость поляризации от времени при $E(t) = \delta(t)$. Интегрируя выражение (11) для $v_p(t)$ по времени t и умножая на ω_p^2 , с учетом начального условия $P(0) = 0$ получаем решение уравнения (6а) при $E(t) = \delta(t)$:

$$P(t)|_{E(t)=\delta(t)} = \omega_p^2 \int_0^t v_p(\tau) d\tau = \omega_p^2 \int_0^t E_{1/(1-\alpha)}\left[-\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_\alpha}\right)^{1-\alpha}; 1\right] d\tau = \omega_p^2 t E_{1/(1-\alpha)}\left[-\left(\frac{t}{\hat{\tau}_\alpha}\right)^{1-\alpha}; 2\right], \quad (12)$$

где $0 < \alpha < 1$.

Это решение при различных значениях показателя дробности α , $\omega_p = 1$ и $\tau_\alpha = 1$, представлено на рис. 4.

Сравнение рис. 2 и 4 показывает, что поведение поляризации в моделях (6) и (6а) при одном и том же воздействии существенно отличается, что обусловлено различными восприимчивостями среды.

Аналогично находится решение уравнения (6б):

$$P(t)|_{E(t)=\delta(t)} = \omega_p^2 t E_{1/(2-\beta)}\left[-\left(\frac{t}{\hat{\tau}_\beta}\right)^{2-\beta}; 2\right], \quad (13)$$

где $0 < \beta < 1$, $\hat{\tau}_\beta = \tau_\beta/(1-\beta)$.

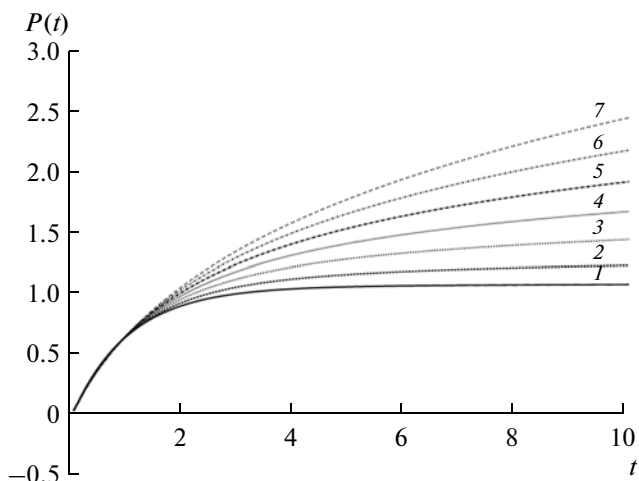


Рис. 4. Поляризация $P(t)|_{E(t)=\delta(t)}$ в случае дробной релаксации при $\alpha = 0.01$ (1), 0.05 (2), 0.1 (3), 0.15 (4), 0.2 (5), 0.25 (6), 0.3 (7).

На рис. 5 представлено выражение (13) при различных показателях дробности β , $\omega_p = 1$ и $\tau_\beta = 1$. Согласно рисунку, с ростом β релаксация колебаний наступает быстрее, а в пределе $\beta \rightarrow 0$ устанавливаются гармонические колебания.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЙ

С помощью численного решения уравнения (3) для ядра оператора рассеяния назад получим отражения в диэлектриках, используя решение (8) в качестве функции отклика среды $\kappa f(t) = P(t)|_{E(t)=\delta(t)}$.

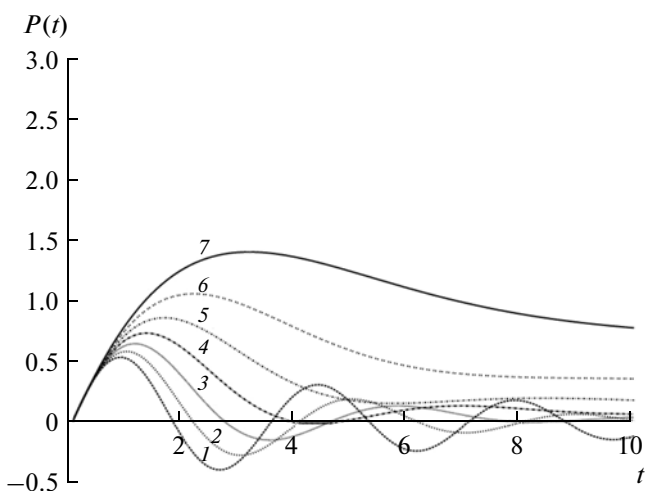


Рис. 5. Поляризация $P(t)|_{E(t)=\delta(t)}$ в случае дробных релаксационных колебаний при $\beta = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.3 (3), 0.4 (4), 0.5 (5), 0.6 (6), 0.7 (7).

Отметим, что сингулярность выражения (8) в нуле не создает трудностей с вычислениями. Значение $t = 0$ просто исключается из рассмотрения, и вычисление начинается на следующем шаге. Найденные отражения при различных значениях α представлены на рис. 6, $\kappa = 1$.

Рассмотрим отражения в плазме. Найдем решение (4) для коэффициента отражения $R(\omega)$ от однородного полупространства среды, которое выражается через спектр характеристической функции $f(\omega)$.

В предельных случаях $\tau \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow 1$, соответствующих бесстолкновительной плазме, в уравнении (6а) релаксационный член обращается в нуль. Тогда выражение (6а) при $E(t) = \delta(t)$ принимает следующий вид: $\ddot{P}(t) = \omega_p^2 \delta(t)$, а его спектральным представлением будет $P(\omega) = -\omega_p^2 / \omega^2$. В результате $\kappa f(\omega) = -\omega_p^2 / \omega^2$. Подставляя это выражение в равенство (4) и вычисляя обратное преобразование Фурье, найдем ядро оператора рассеяния назад для случая плазмы без столкновений:

$$R(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{J_1(\omega_p t)}{t}, \quad (14)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя. Это выражение можно использовать для тестирования численного алгоритма (5). График (14) приведен на рис. 7.

С помощью численного решения уравнения (3) получим отражения в плазме. В случае дробной релаксации используем решение (12) уравнения (6а) в качестве функции отклика среды $\kappa f(t) = P(t)|_{E(t)=\delta(t)}$. На рис. 8 представлены результаты вычисления отражений в плазме $R(t)$ при $\alpha = 0$

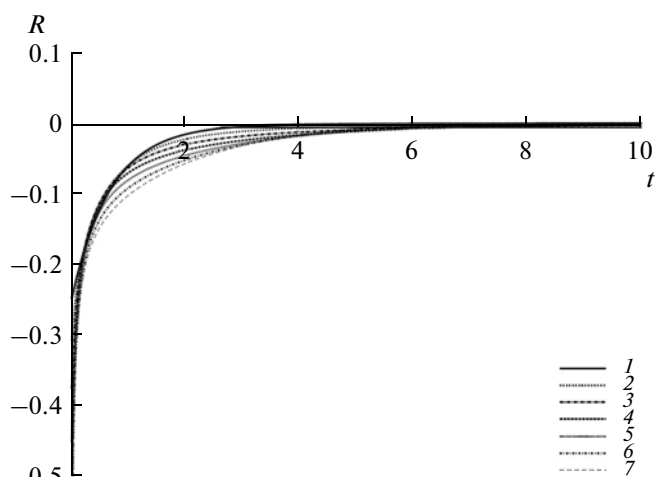


Рис. 6. Отражения $R(t)$ в диэлектриках при $\alpha = 1.0$ (1), 0.9 (2), 0.8 (3), 0.7 (4), 0.6 (5), 0.5 (6), 0.4 (7).

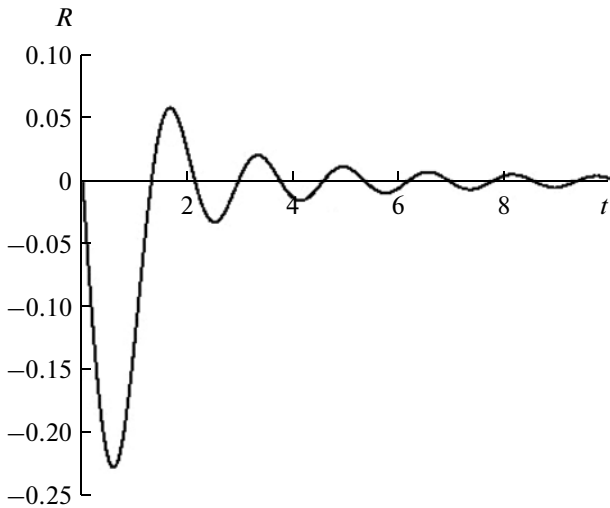


Рис. 7. Отражение $R(t)$ в случае бесстолкновительной плазмы.

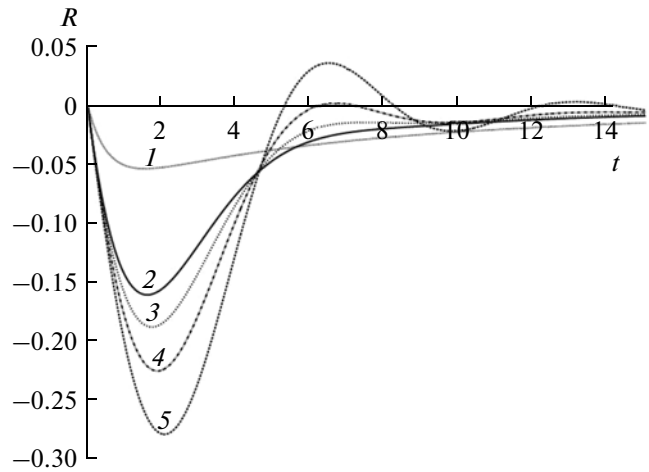


Рис. 8. Отражения $R(t)$ в случае релаксации Дебая в плазме при $\nu_\alpha = 2$ (1), 1 (2), 0.75 (3), 0.5 (4), 0.25 (5).

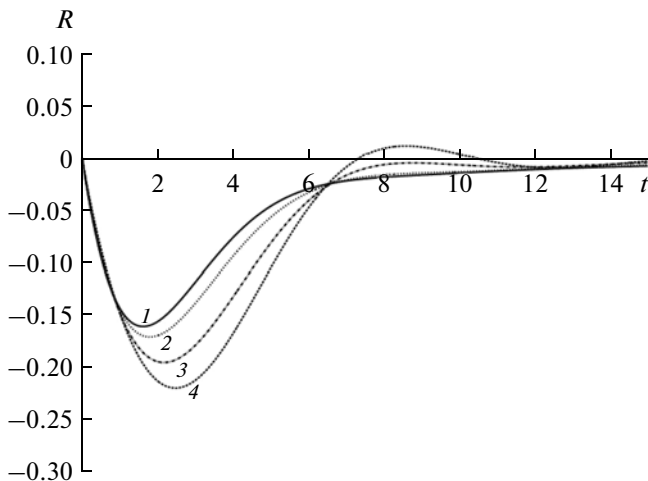


Рис. 9. Отражения $R(t)$ в случае дробной релаксации в плазме при $\alpha = 0.01$ (1), 0.1 (2), 0.3 (3), 0.5 (4).

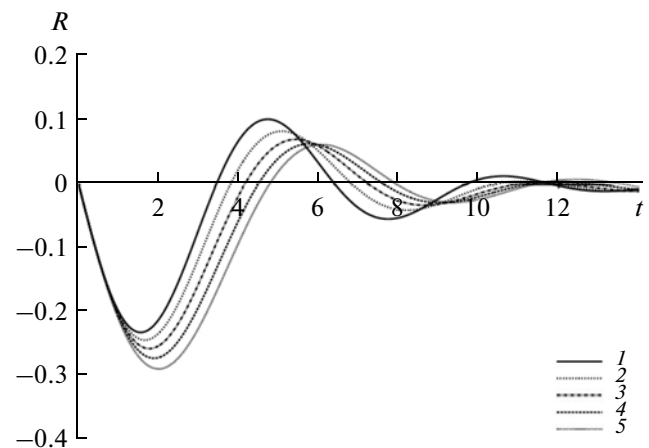


Рис. 10. Отражения $R(t)$ в случае дробных осцилляций при $\beta = 0.31$ (1), 0.4 (2), 0.5 (3), 0.6 (4), 0.7 (5).

(случай релаксации Дебая), $\omega_p = 1$, $\nu_\alpha = 1/\tau_\alpha = 2$, 1, 0.75, 0.5, 0.25.

При быстрой релаксации, соответствующей большим значениям ее показателя $\nu_\alpha = 1/\tau_\alpha$, колебания в отражениях, которые имеют место в случае идеальной плазмы (см. рис. 7), исчезают.

Зафиксируем теперь в решении (12) значения параметров $\nu_\alpha = 1$, $\omega_p = 1$ и построим отражения $R(t)$ при различных значениях показателя дробности $\alpha = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5$ (рис. 9).

С ростом α свойства среды приближаются к случаю бесстолкновительной плазмы и в отражениях начинают появляться колебания. Однако их период и затухание, в отличие от случая, пред-

ставленного на рис. 8, начинают зависеть от параметра α .

Для моделирования отражений в случае аномальных колебаний в среде будем использовать решение (13) уравнения (6б). На рис. 10 приведены результаты вычисления $R(t)$ с параметрами $\tau_\beta = 1$, $\omega_p = 1$, $\beta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$.

Форма отражений при дробных релаксационных колебаниях в среде также имеет особенности, отличные от случая обычных релаксационных колебаний. Это проявляется в том, что период и затухание дробных колебаний зависят от параметра β .

Отражения $R(t)$ можно использовать в целях дистанционной диагностики неоднородных фрак-

тальных сред. Пространственное распределение параметра $\kappa(\chi)$ нетрудно восстановить, применяя метод послойного “раздевания” [3] и линейную аппроксимацию сигнала $\tilde{R}(\chi, t) = -\kappa(\chi)\tilde{f}(t)/4$ вблизи значения времени $t = 0$, при условии, что $f(t)$ — известная функция.

В случае зондирующего импульса произвольной формы $E(t)$ отраженный сигнал имеет вид

$$U(t) = \int_0^t d\tau R(t - \tau)E(\tau),$$

поэтому сначала по измеренному сигналу $U(t)$ и заданному исходному импульсу $E(t)$ находится $R(t)$, а затем восстанавливается пространственное распределение параметра $\kappa(\chi)$.

При этом характер отражений будет зависеть не только от параметров среды, диэлектрической восприимчивости и временного масштаба релаксации, но и от формы зондирующего импульса.

Рассмотренная выше теория отражений с точностью до обозначений может быть использована и в акустике вязкоупругих фрактальных сред. При этом модель (6а) будет соответствовать вязким, а модель (6б) — хрупким релаксационным процессам с долговременной памятью. В зависимости от соотношения между ними по сигналу рассеяния назад можно определить, что преобладает в пластических деформациях — крип или разрушение. Данный активный метод позволяет наблюдать одновременно оба процесса, в то время как метод акустической эмиссии — только процесс разрушения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы акустической диагностики вязкоупругих релаксационных фрактальных процессов могут найти применение в материаловедении и сейсмологии при дистанционных исследованиях формирования критических состояний среды, в непосредственной близости к которым фрактальные эффекты и проявляются. Они могут служить предвестниками сейсмической опасности или потери устойчивости сооружений.

Полученные выше решения можно использовать в волновых экспериментах по модификации состояния диэлектриков, плазмы и твердых тел и обнаружению в них при этом формирования фрактальных структур, например, таких как кластеры каналов электрического пробоя, шаровые молнии или очаги разрушений.

Использованный метод нахождения нестационарных волновых отражений позволяет учесть пространственную дисперсию и нелинейные эффекты, а также найти решения в случае многих сред.

Работа выполнена в соответствии с программами Отделения физических наук Российской академии наук при финансовой поддержке Президиума ДВО РАН (проекты № 12-I-ОФН-15, № 12-I-ОФН-16 и № 12-I-ОФН-17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
2. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения: теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. В 2-х т. Т. 1. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. М.: Физматлит, 2008.
3. *Шевцов Б.М.* Нестационарные отражения в случайных и хаотических средах. М.: Наука, 2008.
4. *Novikov V.V., Privalko V.P.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 3. P. 031504.
5. *Нигматуллин Р.Р., Рябов Я.Е.* // ФТТ. 1997. Т. 39. № 1. С. 101.
6. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
8. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
9. *Laskin N.* // Commun. in Nonlinear Sci. and Numerical Simulation. 2003. V. 8. № 3–4. P. 201.
10. *Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2008. V. 18. № 9. 2717.
11. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка, М.: Наука, 2005.