

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА РАДОНА В СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ© 2009 г. *Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7; e-mail: romano84@mail.ru

Предложена модель стока радона из пород с фрактальными свойствами в приземный слой атмосферы. Рассмотрены режимы супердиффузии и аномальной адвекции. Получены аналитические решения. Проведено их сравнение с результатами классической модели. Обсуждаются особенности смены режимов массопереноса.

A RADON TRANSFER PROCESSES IN FRACTIONAL STRUCTURE MEDIUM*R.I. Parovik, B.M. Shevtsov*Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, RAS
684034, Kamchatka Edge, Paratunka, st. Mirnaya, 7; e-mail: romano84@mail.ru

The model of the radon flowing from rocks with fractional properties in the atmosphere near the surface is offered. The modes of superdiffusion and anomalous advection are considered. They analytical decisions are received and are compared with results the classical model. Peculiarities of changing of the modes transfer are discussed.

Введение. Радон является эффективным индикатором интенсификации геодинамических процессов и, как хороший ионизатор, оказывает влияние на проводимость воздуха и формирование электрического поля атмосферы. Изучением переноса радона в геологических средах занимаются сравнительно давно [1]. Такие исследования проводились, как правило, для разведки урановых руд. При этом были разработаны математические модели, которые легли в основу теории радонового метода поиска полезных ископаемых [1-3]. Однако эти модели строились в предположении о том, что перенос радона осуществляется за счет процессов обычной диффузии в однородных пористых средах. Так, например, в рамках этого подхода была рассмотрена задача стока радона в атмосферу [4].

Но пористые среды обладают, как правило, фрактальными свойствами, наличие которых приводит к процессам аномальной диффузии или адвекции. Целью данной работы является построение математической модели переноса радона в таких средах.

В настоящее время по многим направлениям развивается математическое моделирование массопереноса в средах, имеющих фрактальную структуру [5-7]. Например, в [8] рассмотрены фрактальные модели переноса влаги в водоносных системах, в [9] разработаны одномерные модели фильтрации в средах с фрактальной структурой, в [10,11] рассмотрены модели фрактального переноса радионуклидов в грунте, а в [12] рассмотрены модели фрактального турбулентного переноса в атмосфере. Как правило, механизмом переноса в этих моделях является аномальная диффузия, которая может приводить к увеличению стока вещества в атмосферу в случае супердиффузии или к его уменьшению в режиме субдиффузии. Аномальная адвекция, при которой массоперенос осуществляется еще интенсивнее, чем при супердиффузии, в задачах транспорта радона не рассматривалась.

Развитие дробного интегро-дифференцирования [15] способствовало разработке фрактальной теории переноса [13,14] что привело к созданию нового математического аппарата для опи-

сания транспортных процессов. С его использованием в данной работе и будет рассмотрена задача выноса радона в атмосферу из сред с фрактальными свойствами.

Математическое моделирование процессов переноса радона. Перенос радона в однородной пористой среде без фрактальных свойств описывается уравнением обычной диффузии и адвекции:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + v \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u(x,t) + Q, \quad (1)$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии радона в поровой среде, $\text{м}^2/\text{с}$; Q – интенсивность объемных источников, $1/\text{м}^3\text{с}$; $u(x)$ – объемная концентрация радона, $1/\text{м}^3$; v – скорость адвекции в порах, $\text{м}/\text{с}$; λ – постоянная распада радона, $1/\text{с}$. Поры предполагаются открытыми, т. е. соединены между собой, что обеспечивает диффузию и протекание.

Соотношение (1) следует из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\lambda u(x,t) + Q \quad (2)$$

и закона Фика:

$$q(x,t) = -D \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + vu(x,t). \quad (3)$$

Скорость адвекции в порах представима в виде: $v = \bar{v} + \delta v$, где первое слагаемое – среднее значение скорости, а второе – ее флуктуации. В случае отсутствия регулярной адвекции, которая обычно связана с эффузией или конвекцией, $\bar{v} = 0$. В случае стохастической адвекции усреднение по случайному полю скоростей δv приводит к диффузионному уравнению (1) для средней концентрации радона, но с другим коэффициентом D , который зависит от интенсивности флуктуаций скорости δv [16,17]. Эффекты, связанные с перечисленными типами адвекции, рассматриваться не будут.

Если среда, в которой происходит перенос радона, обладает фрактальными свойствами, то тогда обобщенный закон Фика будет выглядеть следующим образом [18]:

$$q(x,t) = -D \frac{\partial^{\alpha-1} u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}}, \quad (4)$$

где показатель дробности производной α , зависящий от хаусдорфовой размерности фрактала, может меняться в пределах $0 < \alpha < 2$. Интервал $1 < \alpha < 2$ соответствует аномальной диффузии, $\alpha = 1$ – обычному переносу, а $0 < \alpha < 1$ – аномальной адвекции.

Надо отметить, что соотношение (4) может иметь и другую форму записи, учитывающую асимметрию производной относительно точки x , см., например, [11,19,20]. Это обобщение рассматриваться не будет.

При учете нелокальных эффектов по времени выражение (4) имеет более сложный вид [18]:

$$q(x,t) = -D \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} \frac{\partial^{\alpha-1} u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}},$$

где β – показатель дробности производной по времени, меняется в пределах $0 < \beta < 1$. Нелокальность по времени зависимости $q(x,t)$ от $u(x,t)$ связывают с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор. Эти эффекты здесь также рассматриваться не будут.

С учетом (2) и (4) уравнение диффузии радона во фрактальной среде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} - \lambda u(x,t) + Q. \quad (5)$$

При $\alpha=2$ осуществляется переход к уравнению обычной диффузии (1). Ниже будем рассматривать стационарный процесс стока радона из грунта в приземный слой атмосферы, полагая в (5) $\partial u(x,t)/\partial t=0$.

Классическая диффузионная модель. Уравнение переноса (1) в стационарном случае можно представить в виде:

$$D_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - \lambda u_1(x) + Q = 0, \quad x > 0, \quad D_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \lambda u_2(x) = 0, \quad x < 0, \quad (6)$$

где D_1 и D_2 – коэффициенты диффузии в грунте и атмосфере, а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – концентрации радона в этих же средах.

Предполагаем, что на границе двух сред ($x=0$) выполняются условия непрерывности концентрации и потока радона:

$$u_1(0)=u_2(0), \quad D_1 \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=0} = D_2 \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=0}, \quad (7)$$

а на внешних границах сред – краевые условия:

$$u_1 \rightarrow Q/\lambda, \quad x \rightarrow \infty, \quad u_2 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (8)$$

Решение первого уравнения (6) $u_1(x) = c_1 \exp(\sqrt{\lambda/D_1} x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda/D_1} x) + Q/\lambda$ с учетом первого условия (8) дает: $u_1(x) = c_2 \exp(-\sqrt{\lambda/D_1} x) + Q/\lambda$. Решение второго уравнения (6) $u_2(x) = c_3 \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x) + c_4 \exp(-\sqrt{\lambda/D_2} x)$ с учетом второго условия (8) имеет вид: $u_2(x) = c_3 \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x)$.

Найдем константы интегрирования c_2 и c_3 из условий (7), с помощью которых получим систему уравнений: $c_2 + Q/\lambda = c_3$, $-c_2 \sqrt{\lambda/D_1} = c_3 \sqrt{\lambda D_2}/D_1$, решение которых дает искомые константы: $c_2 = Q/\lambda (1 - \sqrt{\lambda D_2}/(\sqrt{\lambda D_2} + \sqrt{\lambda D_1}))$, $c_3 = -Q \sqrt{\lambda D_2}/\lambda (\sqrt{\lambda D_2} + \sqrt{\lambda D_1})$. Подставляя эти константы в представленные выше решения, окончательно будем иметь

$$u_1(x) = (Q/\lambda) \left[1 - \sqrt{\lambda D_2} \exp(-\sqrt{\lambda/D_1} x) / (\sqrt{\lambda D_2} + \sqrt{\lambda D_1}) \right], \quad x > 0, \\ u_2(x) = (Q/\lambda) \left[1 - \sqrt{\lambda D_2} / (\sqrt{\lambda D_2} + \sqrt{\lambda D_1}) \right] \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x), \quad x < 0. \quad (9)$$

Аномальная диффузия. Рассмотрим стационарную диффузию радона в среде с фрактальными свойствами. В этом случае уравнение (5) запишется в виде

$$D_1 d_{0x}^\alpha u_1 - \lambda u_1(x) + Q = 0, \quad x > 0, \quad D_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \lambda u_2(x) = 0, \quad x < 0. \quad (10)$$

А вместо граничных условий (7) будем иметь нелокальные условия [14,15]:

$$\lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-2} u_1(x) = u_2(0), \quad D_1 \lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-1} u_1(x) = D_2 \left. \frac{du_2(x)}{dx} \right|_{x=0}, \quad (11)$$

где d_{0x}^α – оператор Римана-Лиувилля производной дробного порядка α ($1 < \alpha < 2$), который действует по следующему правилу:

$$d_{0x}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Нелокальные граничные условия (11) являются неклассическими условиями сопряжения на границе раздела сред «грунт-атмосфера» для уравнения (10) и характеризуют грунт, как среду, обладающую фрактальными свойствами. Однако согласно оператору Римана-Лиувилля при $\alpha=2$ граничные условия (11) переходят в классические граничные условия (7). Поэтому нелокальные условия (11) можно рассматривать как обобщение известных классических граничных условий (7), а уравнение (10) – как обобщение уравнения (6).

Решение первого уравнения (10) с учетом граничных условий (11) найдем следующим образом. Поскольку второе уравнение диффузии (10) осталось неизменным, то, подставляя его решение $u_2(x) = c_3 \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x)$ в граничные условия (11), получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-2} u_1(x) = c_3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-1} u_1(x) = c_3 \frac{\sqrt{\lambda D_2}}{D_1}. \quad (12)$$

Найдем константу c_3 с помощью преобразования Лапласа первого уравнения (10)

$$p^\alpha \tilde{u}(p) - p \lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-2} u_1(x) - \lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-1} u_1(x) - \lambda \tilde{u}(p) / D_1 + Q / (D_1 p) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно трансформанты $\tilde{u}(p)$ и учитывая условия (12), получим

$$\tilde{u}(p) = p c_3 / (p^\alpha - \lambda / D_1) + c_3 \sqrt{D_2 \lambda} / (D_1 (p^\alpha - \lambda / D_1)) - Q p^{-1} / (D_1 (p^\alpha - \lambda / D_1)) = 0. \quad (13)$$

Делая обратное преобразование выражения (13), найдем

$$u_1(x) = c_3 \left[(\sqrt{D_2 \lambda} / D_1) x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha / D_1) + x^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(\lambda x^\alpha / D_1) \right] + (Q / \lambda) \left[1 - E_\alpha(\lambda x^\alpha / D_1) \right], \quad (14)$$

где $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + 1)$ – специальная функция Миттаг-Леффлера, а $E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + \beta)$ – специальная функция типа Миттаг-Леффлера.

Найдем константу c_3 из выражения (14) и асимптотической формулы разложения функции типа Миттаг-Леффлера [21]:

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\alpha} x^{(1-\beta)/\alpha} \exp(x^{1/\alpha}) - \sum_{k=0}^n x^{-k} / \Gamma(\beta - \alpha k) + O(1/|x|^{n+1}), \quad \alpha \in (0, 2) \text{ и } x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

После некоторых преобразований с помощью разложения (15) константа c_3 будет определена следующим образом:

$$c_3 = (Q / \lambda) (\mu^{1-1/\alpha} / (\mu^{1/\alpha} + \sigma)), \quad \mu = \lambda / D_1, \quad \sigma = \sqrt{\lambda D_2} / D_1. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14) и в решение второго уравнения (10), окончательно получим

$$u_1(x) = (Q / \lambda) \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} (\sigma x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\mu x^\alpha) + x^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(\mu x^\alpha)) / (\mu^{1/\alpha} + \sigma) - E_\alpha(\mu x^\alpha) \right], \quad x > 0$$

$$u_2(x) = Q \mu^{1-1/\alpha} \exp(\sqrt{\lambda / D_2} x) / \lambda (\mu^{1/\alpha} + \sigma), \quad x < 0. \quad (17)$$

Можно проверить, что при $a=2$ и с учетом соотношений $E_{2,1}(\mu x^2) = \text{ch}(\sqrt{\mu}x)$ и $E_{2,2}(\mu x^2) = \text{sh}(\sqrt{\mu}x)/\sqrt{\mu}x$, выражения (17) переходят в решения (9).

Аномальная адвекция. Выше был рассмотрен случай $1 < \alpha < 2$. Однако возможен и другой диапазон изменения этого параметра, когда $0 < \alpha < 1$. В этом случае меняется тип уравнения в грунте, что соответствует переходу супердиффузии в аномальную адвекцию. При этом параметр D_1 будет играть роль скорости аномального переноса.

Решения уравнений (10) будут иметь вид

$$u_1(x) = Ax^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\mu x^\alpha) + (Q/\lambda\eta)[1 - E_\alpha(\mu x^\alpha)], \quad x > 0, \quad (18)$$

$$u_2(x) = A \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x), \quad x < 0,$$

где A находится из единственного в этом случае граничного условия $\lim_{x \rightarrow 0} d_{0x}^{\alpha-1} u_1(x) = u_2(0)$. Оно

дает $A = Q\mu^{1-1/\alpha}/\lambda$, поэтому решения (18) окончательно запишутся так:

$$u_1(x) = (Q/\lambda) \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu x^\alpha) - E_\alpha(\mu x^\alpha) \right], \quad (19)$$

$$u_2(x) = Q\mu^{1-1/\alpha} \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x) / \lambda.$$

При значении $\alpha=1$ решения (17) и (19) перейдут в константу $u_1(x)=Q/\lambda$. Это означает, что происходит обычный перенос радона со скоростью D_1 .

Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$ в обобщенном законе Фика (4) поток радона выражается через его концентрацию с помощью оператора дробного интегрирования, а не дифференцирования, степень которого также связана с фрактальной размерностью среды [8]. Однако в этом случае в уравнении (5) появляется дополнительный фактор, влияющий на изменение концентрации радона. Действительно, если рассмотреть предельный случай и положить $\alpha=0$, то получим отсутствие переноса и рост или уменьшение концентрации радона в зависимости от соотношения параметров D_1 и λ .

Таким образом, случай $0 < \alpha < 1$ описывает не только процесс переноса, но еще и дополнительное выделение радона в поровое пространство из поровых фрактальных структур. Такое возможно, например, при разуплотнении (дилатансии) пород, возникающем в результате разрушений. А это значит, что аномальная адвекция может объяснить выбросы радона в периоды сильных деформационных возмущений.

Результаты модельных расчетов. Коэффициент диффузии D_1 зависит от заполнения пор, а D_2 – от интенсивности турбулентности в атмосфере. Оба параметра могут меняться в пределах нескольких порядков [3], но есть сопоставимые их значения, когда поры заполнены воздухом, а атмосфера неподвижна. Чтобы не получались сильные градиенты концентрации радона вблизи границы раздела сред, используем при численном моделировании сопоставимые значения D_1 и D_2 , $4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ и $5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, постоянная распада радона $\lambda=2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/с}$. При этих значениях параметров длина диффузии радона $l = \sqrt{D/\lambda} \approx 0.5 \text{ м}$.

На рис.1 приведены расчетные кривые концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от значений параметра дробности в случае супердиффузии ($1 < \alpha < 2$). Концентрация радона дана в единицах равновесной концентрации в грунте. Видно, что вблизи границы раздела сред распределения радона располагаются между кривыми $\alpha=2$ и 1. Первая из них соответствует

обычной диффузии, а вторая – такой же адвекции. Однако при углублении в среду линии перегруппировываются в обратном порядке и с уменьшением α расчетные кривые затягиваются, а это означает, что длина диффузии увеличивается, и радон легче проникает через пористый грунт.

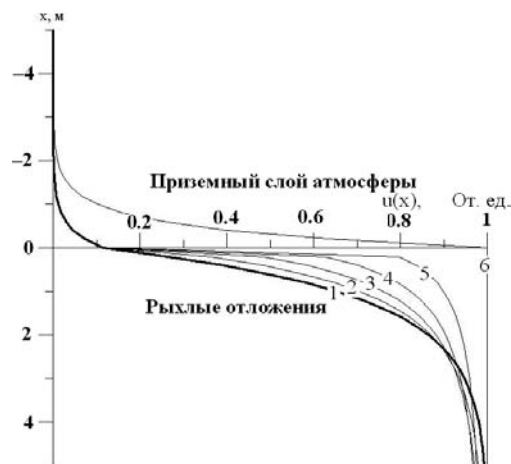


Рис.1. Кривые концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от параметра α : 2 (1); 1.8 (2); 1.6 (3); 1.4 (4); 1.2 (5); 1 (6).

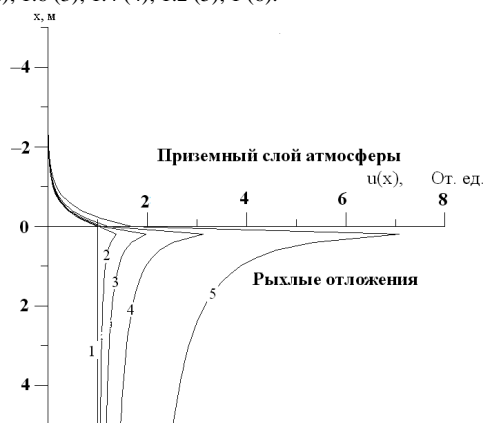


Рис.2. Кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от параметра α : 1 (1); 0.8 (2); 0.6 (3); 0.4 (4); 0.2 (5).

На рис.2 представлены расчетные кривые концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от значений параметра дробности в случае аномальной адвекции ($0 < \alpha < 1$). Вычисления показывают, что радон еще интенсивнее, чем при супердиффузии, выносится из фрактальной среды и концентрируется вблизи границы с атмосферой. Величина локального максимума определяется соотношением коэффициентов D_1 и D_2 . Аномальную адвекцию, как отмечалось выше, можно объяснить переносом, сопровождающимся выделением радона из поровых фрактальных структур в поровое пространство. Однако, каковы свойства этих структур, как они зависят от состояния среды и каким образом размерность фрактала связана с показателем дробности производной в уравнении переноса – эти вопросы требуют отдельных исследований.

Заключение. С использованием аппарата теории дробного дифференциального исчисления построена модель стока радона из пород с фрактальными свойствами в приземный слой атмосферы. Рассмотрены стационарные режимы супердиффузии и аномальной адвекции. Найдены аналитические решения и получены пространственные распределения концентрации радона в грунте и атмосфере. Исследованы особенности переноса радона в зависимости от показателя дробности. Показано, как при значениях $\alpha=1$ происходит смена режимов транспорта радона. Дано объяснение интенсивных выбросов радона в периоды сильных деформационных возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Граммаков А.Г., Никонов А.И., Тарфеев Г.П. Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд. – М.: Госгеолтехиздат, 1957, 610 с.
2. Булашевич Ю.П., Хайретдинов Р.К. К теории диффузии эманации в пористых средах // Известия АН СССР, серия геофизическая, 1959, №12, с.1787-1792.
3. Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. – М.: Недра, 1965, 750 с.
4. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Обобщенная одномерная модель массопереноса радона ^{222}Rn и его эксхалация в приземный слой атмосферы // Математическое моделирование, 2007, №11, т.19, с.43-50.
5. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. – М.: Едиториал УРСС, 2002, 112 с.
6. Крылов С.С., Бобров Н.Ю. Фракталы в геофизике. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2004, 138 с.
7. Москалев П.В., Шитов В.В. Математическое моделирование пористых структур. – М.: Физматлит, 2007, 120 с.
8. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. – М.: Наука, 2007, 167 с.
9. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М.: Наука, 2006, 173 с.
10. Драников И.Л. Аномальная диффузия в простых физических моделях. – М.: ИПБРАЭ, 2007, автореф. дис. кандидата физико-математических наук, 25 с.
11. Бولیшов Л.А., Дыхне А.М., Кондратенко Т.С. Аномальная диффузия и флуктуационные эффекты в сильно неупорядоченных средах // Письма в ЖЭТФ, 2002, т.75, вып.5/6, с.291-293.
12. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005, 848 с.
13. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003, 272 с.
14. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005, 199 с.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006, 523 с.
16. Кляцкин В.И. Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках. – М.: Физматлит, 2005, 160 с.
17. Уткин С.Г. Статистика и кинематика аномально-диффузионных процессов. – Нижний Новгород: НГУ, 2005, дис. кандидата физико-математических наук, 127 с.
18. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук, т.173, №8, с.847-876.
19. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports, 2002, v.371, p.461-580.
20. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports, 2000, т.339, p.1-77.
21. Джрбабян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966, 672 с.

Поступила в редакцию 27.10.08