

Некоторые свойства фрактального параметрического осциллятора

ПАРОВИК Р.И.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН ,
Россия

romanpragovik@gmail.com

В работе рассмотрена модель фрактального параметрического осциллятора. Получено и исследовано его решение. Построены диаграммы Стретта-Айнса и фазовые траектории в зависимости от фрактальных параметров входящих в исходное уравнение.

Введение

В изучении нелинейных динамических систем часто применяется понятие нерегулярного аттрактора для описания детерминированного хаоса. Нерегулярный аттрактор, как правило, представляет собой фрактал со сложной геометрией [1]. В свою очередь понятие фрактала согласуется с теорией физики открытых систем и другими важными понятиями синергетикой и самоорганизацией [2].

Применение понятия фрактала в нелинейных динамических системах привело к необходимости разработки новых методов их анализа. Одним из таких, на мой взгляд, эффективных методов является метод дробных производных [3]. Этот метод позволяет определить закономерности явлений не только в нелинейных динамических системах, но и в других системах: экономических или социально-гуманитарных. Такая возможность метода обусловлена тем, что за счет изменения порядка дробной производной мы не только подтвердим известные, но и приедем к новым результатам.

Разработка теории фрактальных колебательных систем может рассматриваться как метод изучения динамических процессов в естественных средах, например в иносферно-магнито-сферной плазме для описания диффузии резонансных фотонов.

Постановка задачи и метод решения

Пусть некоторая колебательная система описывается дифференциальным уравнением второго порядка вида:

$$u''(\tau) = F(t, u(t)) \quad (1)$$

$F(t, u(t))$ – некоторая сила, которая зависит от смещения $u(t)$. Пусть эта зависимость выглядит так:

$$F(t, u(t)) = -\frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^t \frac{u(\tau) [\cos(\omega\tau) \delta + \xi] d\tau}{(t-\tau)^{\beta-2}}. \quad (2)$$

Здесь ξ и δ параметры – заданные константы, $1 < \beta < 2$. Интеграл (2) со степенным ядром означает, что колебательная система обладает нелокальностью по времени, т.е. “памятью”. Уравнение (1) с учетом представления (2) можно переписать так:

$$u''(\tau) = -\frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^t \frac{u(\tau) [\cos(\omega\tau) \delta + \xi] d\tau}{(t-\tau)^{2-\beta}} \quad (3)$$

Можно показать, что уравнение (3) можно переписать в терминах производной дробного порядка:

$$\partial_{0t}^\beta u(\tau) + [\delta + \xi \cos(\omega t)] u(t) = 0, \quad (4)$$

которая определяется так $\partial_{0t}^\beta u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{u''(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta-1}}$.

Заметим, что в случае, когда $\beta = 2$ уравнение (4) описывает эффект параметрического резонанса и называется уравнением Маттье

$$u''(t) + [\delta + \xi \cos(\omega t)] u(t) = 0 \quad (5)$$

Отметим, что если положить в уравнении (4) $\xi = 0$ и $\delta = \phi^\alpha$, то оно переходит в известное уравнение дробного (фрактального) осциллятора, которое подробно исследуется в работах [4]-[6]:

$$\partial_{0t}^\beta u(\tau) + \omega^\beta u(t) = 0. \quad (6)$$

В работе [4] моделирование фрактального осциллятора проводились с помощью оператора дробного дифференцирования Римана-Лиувилля, в работах [5] и [6] с помощью оператора Капуто (5), однако правильней называть его оператором Герасимова-Капуто, так как упоминания об этом операторе можно найти в работе Герасимова А.Н. (1948 г.) [7].

В работе автора [8] исследовалась задача Коши для более общего уравнения типа (4): найти решение $u(t)$, где $t \in [0, T]$:

$$\partial_{0t}^\beta u(\tau) + [\delta + \xi \cos_\alpha(\omega t)] u(t) = 0, \quad (7)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_1, \quad u'(0) = u_2. \quad (8)$$

Здесь $\cos_\alpha(\omega t) = E_{\alpha,1}[-(\omega t)^\alpha] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ – обобщенный косинус [5], представляет собой функцию типа Миттаг-Леффлера с параметром $1 < \alpha < 2$ и который при значении параметра $\alpha = 2$ совпадает с обычным косинусом, т.е. $\cos_2(\omega t) = \cos(\omega t)$. Параметры u_1, u_2 – заданные константы.

В результате уравнение (7) представляет собой обобщение уравнений (4) и уравнения Маттье (5) и фрактального осциллятора (6). Колебательную систему, описываемую уравнением (7) условно будем называть *фрактальным параметрическим осциллятором* и его можно записать в виде:

$$u(t) - \xi \int_0^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau = g(t) \quad (9)$$

Здесь ядро $-K(t, \tau) = (t - \tau)^{\beta-1} E_{\beta, \beta} \left[-\delta (t - \tau)^\beta \right] \cos_\alpha(\omega \tau)$ и правая часть (9) $g(t) = u_1 E_{\beta,1}(-\delta t^\beta) + u_2 t E_{\beta,2}(-\delta t^\beta)$.

Заметим, что если в (9) положить $\xi = 0$, то мы получим известное решение уравнения фрактального осциллятора [4].:

$$u(t) = u_1 E_{\beta,1}(-\delta t^\beta) + u_2 t E_{\beta,2}(-\delta t^\beta)$$

Решение интегрального уравнения (9) можно найти численно с помощью квадратурных формул.

Диаграммы Стретта-Айнса. Рассмотрим дифференциальное уравнение (4) в дробных производных при $\omega = 1$:

$$\partial_{0t}^\beta u(\tau) + [\delta + \xi \cos(t)] u(t) = 0 \quad (10)$$

Определим, при каких условиях может существовать параметрический резонанс. Для этого в $\delta - \xi$ плоскости необходимо определить области устойчивости и неустойчивости решения уравнения (10), построив диаграммы Стретта-Айнса. Как правило, в области неустойчивости существует параметрический резонанс, который приводит к возрастанию амплитуды колебаний. Оценим параметр δ :

$$\delta = \frac{1}{2^\beta} \sin((\beta - 1)\pi/2) \pm \frac{1}{2^{\beta+1}} \sqrt{2^{2\beta}\xi^2 - 4 \cos^2((\beta - 1)\pi/2)} \quad (11)$$

Если в формуле (11) положить $\beta = 2$ получим известное соотношение для классического параметрического резонанса Матье в первом приближении:

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{\xi}{2} \quad (12)$$

На рис.1а, в качестве примера, построена диаграмма Стретта-Айнса согласно соотношению (12).

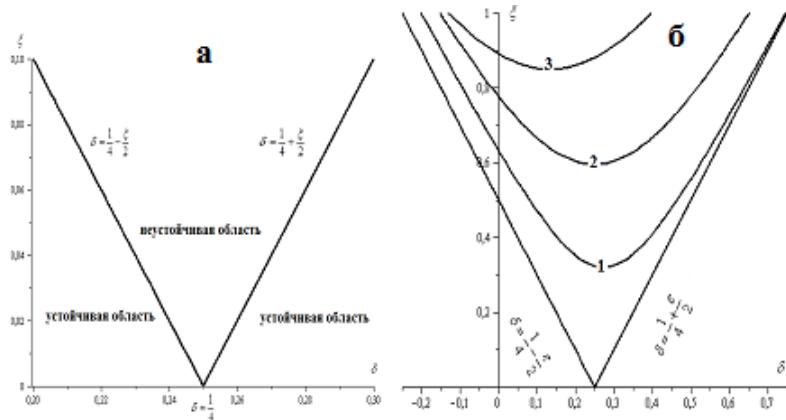


Рис. 1. Диаграмма Стретта-Айнса для параметра δ : а) кривые построены при $\beta = 2$; б) кривые построены в зависимости от параметра β : 1) - $\beta = 1.8$; 2) - $\beta = 1.6$; 3) - $\beta = 1.2$.

Из рис. 1б видно, что при уменьшении параметра β изменяется вид кривых, т.е. изменяются границы областей устойчивости и неустойчивости. Область неустойчивости сужается при значениях параметра $\beta \rightarrow 1$, поэтому эффект параметрического резонанса уменьшается.

Анализ решения уравнения (10) показал, что при изменении параметра β сужается область неустойчивости.

Фазовые траектории. Определенный интерес представляет изучение фазовых траекторий колебательной системы, так как это позволяет на качественном уровне понять ее поведение, определить в моменты времени ее состояние.

В численном моделировании для простоты будем полагать, что $u_2 = 0$ и $u_1 = \omega = 1$. На рис.2. приведены фазовые траектории с параметрами $n = 100$, $t \in (0, 2\pi)$ для следующих случаев: (рис.2а) гармонический осциллятор – окружность и фрактальный осциллятор – $\beta = \{1, 8; 1, 6; 1, 4\}$, $\xi = 0$, (рис.2б) фрактальный параметрический осциллятор – $\beta = \{1, 8; 1, 6; 1, 4\}$, $\alpha = 2$, $\xi = 1$ и (рис. 2с) $\alpha = \{1, 8; 1, 6; 1, 4\}$, $\beta = 1.8$, $\xi = 1$.

Фазовая траектория–окружность соответствует классическим гармоническим колебаниям системы, а фазовые траектории фрактального осциллятора согласуются с фазовыми траекториями, построенными в работе [4].

Новые результаты приведены на рис.2б и рис.2с. В первом случае при фиксированном значении $\beta = 1.8$ и при разных значениях α , фазовые траектории параметрического осциллятора, в общем, похожи на фазовые траектории фрактального осциллятора (рис.

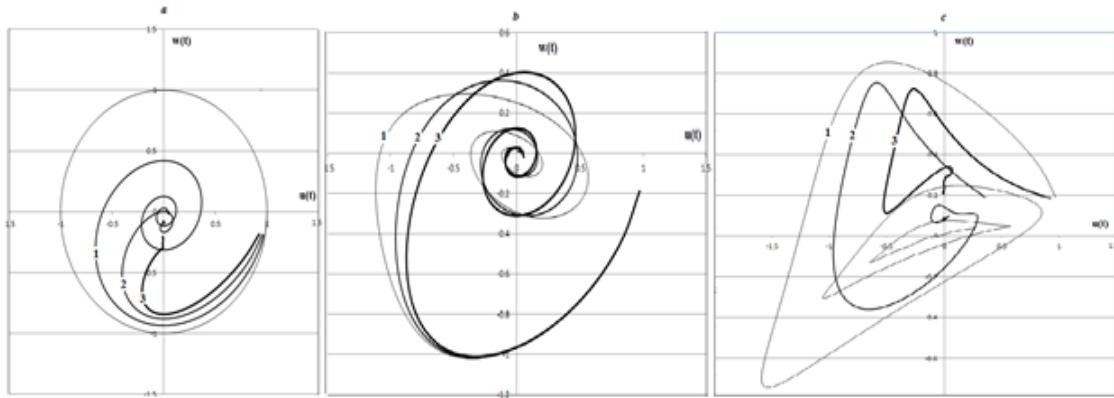


Рис. 2. Фазовые траектории а) гармонический и фрактальный осциллятор ξ : кривая 1 - $\beta = 1.8$, кривая 2 - $\beta = 1.6$, кривая 3 - $\beta = 1.4$; фрактальный параметрический осциллятор б) $\alpha = 2$ и $\xi = 1$: кривая 1 - $\beta = 1.8$, кривая 2 - $\beta = 1.6$, кривая 3 - $\beta = 1.4$ и с) $\beta = 1.8$ и $\xi = 1$: кривая 1 - $\alpha = 1.8$, кривая 2 - $\alpha = 1.6$, кривая 3 - $\alpha = 1.4$.

2а), но имеют несколько иной затухающий вид типа устойчивого фокуса. Видно (рис. 2б), что несколько раз происходит перегруппировка траекторий. Это обусловлено свойствами функции обобщенного косинуса, который входит в исходное уравнение (1). Фазовая траектория на рис. 2с. была построена при фиксированном значении $\alpha = 2$ и разных значениях параметра β . Фазовые траектории в этом случае имеют принципиально другой вид.

Заключение

В настоящей работе с помощью решения задачи Коши (7) – (8), которое обобщает известные решения для гармонического и фрактального осцилляторов, были построены фазовые траектории. Расчеты подтвердили ранее полученные результаты [4] и привели к новым. Фазовые траектории параметрического осциллятора отличаются от ранее известных и обладают более сложной структурой. Поэтому возможны нелинейные эффекты в таких системах.

Работа выполнена по программе ОФН РАН V.14(проект 12-I-ОФН-15).

Автор благодарит Шевцова Б.М. за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. – М.– Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.
2. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. – М.: Янус-К, 2002. 284 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
4. Мейланов Р.П., Янолов М.С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора \\ Письма ЖТФ, 2002. Т 28. вып. 1. С. 67-73.
5. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов – М.: Наука, 2006. – 173 с.
6. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena \\ Chaos, Solitons and Fractals, 1996. Vol. 7, №9. P. 1461-1477

7. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикладная математика и механика, 1948. Т. 12. С. 251-260.
8. Паровик Р.И. Задача Коши для обобщенного уравнения Матье \\ Доклады АМАН, 2011. Т.13. №13. С. 90-98.

Phase analysis of fractal oscillating systems

Parovik R.I.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation FEB RAS, Russia

The paper presents phase analysis of oscillating systems with fractal properties. Fractal properties of such systems are determined by external force effect, which depend not only on time but also on shift. This dependence is presented by fractional integral with exponential kernel, which characterizes memory feature and gives a possibility for better interpretation of different effects in such systems and for their application in geophysical fields.