О закономерностях распространения деформаций изменения формы в несжимаемой нелинейно-упругой среде

Дудко О.В., Лаптева А.А.
Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Россия
dudko@iacp.dvo.ru, lanastal@mail.ru

Со времен Гука теория деформирования твердого тела базируется на линейной аналитической зависимости напряжений от деформаций, однако хорошо известно, что для подавляющего большинства природных и конструкционных материалов связь между напряжениями и деформациями оказывается нелинейной. Математическая модель изотропного нелинейно-упругого материала, в которой известный закон Гука составляет лишь первые два слагаемых более сложной функции, позволяет изучать качественные особенности возникновения и распространения поверхностей разрывов деформаций – ударных волн. При этом процессы изменения формы и объема оказываются взаимозависимыми, а разрывы деформаций – комбинированными [1, 2]. Если основным объектом исследования являются закономерности распространения по среде сдвиговых деформаций, материал можно считать несжимаемым [3], что существенно упрощает анализ. Но и в этом случае возникающие в среде поверхности разрывов деформаций имеют свойства, не отмечаемые линейной теорией.

Основные модельные соотношения несжимаемой нелинейно-упругой среды

Считаем, что материал в процессе деформирования сохраняет свой объем и допускает только деформации изменения формы. Модельные соотношения запишем в прямоугольной декартовой системе координат, используя эйлеров способ описания движения сплошной среды и предполагая отсутствие массовых сил:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \qquad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}),\\ 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \qquad v_i = \dot{u}_i + v_j u_{i,j}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скорости движения точек среды; α_{ij}, σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши соответственно; P – добавочное давление; δ_{ij} – символ Кронеккера; индексом после запятой обозначена частная производная функции по пространственной переменной ($u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j$), точкой – частная производная по времени t. Упругий потенциал W – эмпирическая функция состояния, замыкающая систему модельных соотношений (1). В качестве упругого потенциала $W{=}W(\alpha_{ij})$ принимаем плотность распределения внутренней энергии при адиабатическом приближении для упругой среды [1, 2]. В этом случае деформирование оказывается изэнтропическим всюду в среде, где деформации непрерывны, и плотность распределения энтропии может изменяться скачком только на поверхностях разрывов деформаций. Полагая упругую среду изотропной, будем считать, что всюду, где деформации непрерывны, функцию W можно разложить в ряд Маклорена в окрестности свободного состояния:

$$\begin{gathered}W(\alpha_{ij}) = (a-\mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \zeta I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + \chi I_1^2 I_2 + \ldots,\\ I_1 = \alpha_{ii}, \qquad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}.\end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку в несжимаемой среде всегда выполняются неравенства $I_1<0$ и $I_2>0$, то знаки перед слагаемыми функции (2) расставлены так, чтобы все постоянные материала μ, a, b, ζ, θ и т.д. были положительными. Коэффициент μ следует отождествлять с модулем сдвига упругой среды, другие постоянные являются упругими модулями более высокого порядка.

Учитывая зависимость (2) в формуле Мурнагана (первом соотношении системы (1)), получаем нелинейную связь между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij}=-P\delta_{ij}+2\left\{\mu-(\zeta+2b)u_{k,k}+\frac{\zeta+2b}{2}d_{kk}+(\zeta+2d)e_{ks}e_{sk}\right\}e_{ij}-$$
$$-\{\mu-(\zeta+2b)u_{k,k}\}\,d_{ij}-4(a-\zeta u_{k,k})e_{is}e_{sj}+2a(d_{ik}e_{kj}+e_{ik}d_{kj})+\ldots,$$
$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\qquad d_{ij}=u_{k,i}u_{k,j},$$

которая в случае одномерного движения точек среды ($u_i=u_i(x_1,t)$) позволяет записать компоненты тензора напряжений через компоненты градиента перемещений:

$$\sigma_{11}=-P-\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k m^k,\qquad \sigma_{i1}=u_{i,1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k m^k\qquad (i=2,3),$$
$$m=u_{2,1}^2+u_{3,1}^2. \tag{3}$$

Коэффициенты γ_k, β_k в (3) полностью определяются упругими постоянными среды ($\gamma_0=\mu$, $\gamma_1=a+b+d+\zeta$, $\ldots$; $\beta_1=\mu+a$, $\ldots$). Уравнение движения (второе равенство системы (1)) в этом случае приводит к соотношениям

$$P_{,1}-\sum_{k=1}^{\infty}2k\beta_k m^{2k-1}m_{,1}=0,\qquad \sigma_{i1,1}=\rho\ddot{u}_i\qquad (i=2,3). \tag{4}$$

Возможные плоскости разрывов деформаций – ударные волны

Обобщенное решение системы модельных соотношений (1)-(2) может иметь сильный разрыв первого рода на некоторой движущейся поверхности $\Sigma(t)$. Возможные скачки деформаций на такой поверхности необходимо связать динамическими условия совместности разрывов

$$[\rho(\upsilon_j\nu_j-G)]=0,\qquad [\sigma_{ij}]\nu_j=\rho^+(\upsilon_j^+\nu_j-G)[\upsilon_i],$$
$$\sigma_{ij}^+[\upsilon_i]\nu_j=\rho^+(\upsilon_j^+\nu_j-G)\left(\frac{[\upsilon_i][\upsilon_i]}{2}+[e]\right)-[q_j]\nu_j, \tag{5}$$

которые являются следствиями законов сохранения массы, импульса и энергии. В (5) квадратными скобками обозначен скачок разрывной функции на поверхности $\Sigma(t)$: $[f]=f^+-f^-$, где f^+ – значение разрывной величины перед $\Sigma(t)$, f^- – сразу за $\Sigma(t)$; ν_j – компоненты единичной нормали к поверхности разрывов $\Sigma(t)$, направленной в сторону ее продвижения; G – скорость распространения $\Sigma(t)$; q_j – компоненты вектора потока тепла; e – плотность распределения внутренней энергии.

В случае одномерного движения точек среды анализ соотношений (5) позволяет сделать выводы о характере возможных поверхностей сильных разрывов с достаточно ясным механическим смыслом. Привлекая кинематические и геометрические условия совместности разрывов первого порядка [4], из (5) для одномерных плоских ударных волн в несжимаемой упругой среде можно получить:

$$[\sigma_{i1}]=-\rho G[\upsilon_i],\quad [\upsilon_i]=-G\tau_i,\quad \tau_i=[u_{i,1}]\qquad (i=2,3),$$
$$[\sigma_{11}]=0,\qquad [\upsilon_1]=0. \tag{6}$$

Первое равенство из (6) после подстановки в него зависимостей (3) приводит к соотношениям

$$\tau_i\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(m^+)^k+(u_{i,1}^+-\tau_i)[m]\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}C_k^j(m^+)^{k-j}[m]^{j-1}=\rho G^2\tau_i \qquad (i=2,3). \quad (7)$$

При известном деформированном состоянии перед плоскостью разрывов $\Sigma(t)$ соотношения (7) представляют собой систему двух уравнений относительно трех неизвестных τ_2, τ_3, G. Умножая первое уравнение (при $i=2$) на τ_3, а второе ($i=3$) на τ_2, вычитаем одно из другого и таким образом получаем условие на деформированное состояние перед и сразу за волной $\Sigma(t)$:

$$\left\{\tau_3(u_{2,1}^+-\tau_2)-\tau_2(u_{3,1}^+-\tau_3)\right\}[m]=0. \quad (8)$$

Выполнение условия (8), которое накладывает ограничения на существование разрывов τ_2 и τ_3, возможно только в двух случаях. Во-первых, левая часть равенства (8) может обращаться в ноль при $[m]\neq 0$, когда

$$\frac{u_{3,1}^+}{u_{2,1}^+}=\frac{u_{3,1}^-}{u_{2,1}^-}=\frac{\tau_3}{\tau_2}. \quad (9)$$

Этот случай соответствует *ударной волне нагрузки*, которая может изменить только интенсивность предварительного сдвига m^+ без изменения его направленности. Плоскость поляризации такой волны полностью определяется предварительными деформациями в среде и не зависит от характера ударного воздействия. С другой стороны, скорость ее распространения, вычисленная из (7), включает в себя скачки деформаций:

$$G_1=\left\{\rho^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(m^+)^k+\rho^{-1}\frac{u_{2,1}^+-\tau_2}{\tau_2}[m]\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\sum_{j=1}^{k}(-1)^jC_k^j(m^+)^{k-j}[m]^{j-1}\right\}^{1/2}. \quad (10)$$

Вторая возможность выполнения условия (8) связана с равенством $[m]=0$. Это означает, что интенсивность предварительного сдвига на такой плоскости разрывов деформаций неизменна, скачкообразно меняется только его направленность. Данную плоскость разрывов называют *ударной волной круговой поляризации* [5]. Скорость ее продвижения, полученная из (7), полностью определяется предварительными деформациями:

$$G_2=\left\{\rho^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(m^+)^k\right\}^{1/2}. \quad (11)$$

Сравнение (10) и (11) позволяет следать вывод, что G_1 всегда больше G_2. Ударная волна круговой поляризации является изэнтропической. Направленность сдвиговых деформаций при переходе через данную поверхность разрывов ориентируется в зависимости от производимого ударного воздействия на граничной плоскости тела.

Кроме условия (8) разрешимости системы уравнений в разрывах (7), в упругой среде имеет место другое ограничение на существование ударной волны – термодинамическое условие совместности разрывов [2]. В рассматриваемом адиабатическом приближении для упругой среды плотность распределения энтропии является кусочно-постоянной функцией, которая может изменяться скачком только на ударных волнах. Требование ее неубывания при переходе через плоскость разрывов в нашем случае сводится к неравенству

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=3}^{2k}\left(\frac{j}{3}-1\right)\frac{2k!(-1)^j}{j!(2k-j)!}(u_{2,1}^+)^{2k-j}\tau_2^j\geq 0, \quad (12)$$

если повернуть систему независимых пространственных координат таким образом, чтобы $u_{2,1}^{+} \neq 0$, $u_{3,1}^{+} = 0$ (и, согласно (9), $\tau_2 \neq 0$ и $\tau_3 = 0$).

Неравенство (12) заведомо выполняется, если перед плоскостью разрывов среда недеформирована. Когда сдвиговые деформации перед $\Sigma(t)$ присутствуют, то достаточным условием для выполнения (12) является условие $u_{2,1}^{+}\tau_2 \leq 0$. Это означает, что возможны только ударные волны, приводящие к развитию имеющихся в среде сдвиговых деформаций. Ударные волны сдвиговой разгрузки термодинамически невозможны. Такое условие является аналогом теоремы Цемплена, не допускающей в газовой динамике существования ударных волн расширения.

Отсутствие скачка напряжений σ_{11} в равенствах (6) служит для вычисления разрыва добавочного гидростатического давления P. Из условия $[\sigma_{11}] = 0$ следует, что ненулевой разрыв $[P]$ возможен только на плоскополяризованной волне нагрузки, распространяющейся со скоростью (10). На ударной волне круговой поляризации скачок функции P невозможен.

Знание характера и особенностей распространения возможных поверхностей сильных разрывов в несжимаемой нелинейно-упругой среде необходимо для решения краевых задач динамического деформирования, поскольку позволяет еще на стадии их постановки сделать предположения о волновой картине, возникающей при том или ином граничном воздействии. В [6] представлено решение краевой задачи о взаимодействии двух плоских волн нагрузки постоянной интенсивности в несжимаемой упругой среде, основанное на приведенном выше теоретическом анализе свойств одномерных ударных волн.

Литература

1. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир. – 1972. 183 с.

2. *Буренин А.А., Чернышов А.Д.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. – 1978. – Т. 42. – № 4. С. 711-717.

3. *Буренин А.А.* Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – № 5. С. 3-8.

4. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука. – 1998. 528 с.

5. *Куликовский П.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах.– М.: Московский лицей. – 1998. 412 с.

6. *Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А.* К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. XIV. – № 4(48). С. 14-23.

About the regularities of propagation of shift deformations in incompressible nonlinear-elastic media

Dudko O.V., Lapteva A.A.

Institute of Automation and Control Processes FEBRAS, Russia

The relationship between stress and strain is nonlinear for the overwhelming majority of natural and structural materials. This fact is most evident in intensive dynamic deformation of solids and is expressed in the appearance of surfaces of strong breaks – shock waves. In general,

the processes of change in the shape and volume are interdependent, and breaks strains are combined. In the paper the results of a study of ways to propagation of shear deformations in the nonlinear elastic media, which does not allow the volume change, are presented. In the case of flat surfaces of breaks the conditions of occurrence of the two types of shear shock waves (wave of shear load and circularly polarized wave) are indicated, their velocities are calculated, the regularities of changes in the parameters of stress-strain state in the transition of the wave surface are described.