

УДК 517.955

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ГЕОСРЕДЫ**

**Паровик Р.И.<sup>1,2</sup>, Фирстов П.П.<sup>3</sup>, Макаров Е.О.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

<sup>2</sup> Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

<sup>3</sup> Камчатский филиал Геофизической службы РАН, 683006, г. Петропавловск-Камчатский, бул. Пийпа, 9

E-mail: romano84@mail.ru

Предложен алгоритм оценки фрактальной размерности с помощью временных рядов радоновых полей. Установлены некоторые закономерности фрактальной размерности с сейсмической активностью Южной Камчатки.

*Ключевые слова: фрактальная размерность, временной ряд, дробная производная*

© Паровик Р.И., Фирстов П.П., Макаров Е.О., 2011

MSC 00A71

## **MATHEMATICAL MODELING OF FRACTAL DIMENSION GEOMEDIUM AND**

**Parovik R.I.<sup>1,2</sup>, Firstov P.P.<sup>3</sup>, Makarov E.O.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Krai, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

<sup>2</sup> Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11 / 1, Russia

<sup>3</sup> Kamchatka Branch of Geophysical Service RAS, 683006, Petropavlovsk-Kamchatsky, Piip Boulevard 9

E-mail: romano84@mail.ru

We propose an algorithm for estimating the fractal dimension of time series of radon fields. Some regularities of the fractal dimension with the seismic activity in South Kamchatka.

*Key words: fractal dimension, time series, the fractional derivative*

© Parovik R.I., Firstov P.P., Makarov E.O., 2011

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время происходит интенсивное развитие дробного анализа и его приложений в различных областях знаний. С помощью дробного интегро-дифференцирования или дробного анализа можно строить адекватные математические модели природных, социальных и других явлений и процессов. Это возможно потому, что уравнения, описывающие эти явления, содержат новые параметры, которые учитывают свойства нелокальности по времени и координате.

В интерпретации экспериментальных данных эти параметры позволяют решениям соответствующих нелокальных уравнений наиболее точно их аппроксимировать и давать информацию о свойствах объекта изучения.

Необходимо отметить, что при решении дифференциального уравнения дробного порядка мы, с одной стороны решаем бесчисленное множество дифференциальных уравнений, а с другой получаем множество соответствующих им решений или различные функциональные пространства. Такое многообразие позволяет строить адекватные математические модели. На основе этой фундаментальной особенности дробного анализа и построена настоящая работа, в которой дробный анализ использован для целей исследования временных рядов экспериментальных данных мониторинга подпочвенного радона ( $^{222}\text{Rn}$ ) с целью выделения и формализации предвестниковых аномалий сильных землетрясений района Южной Камчатки.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение миграции Rn в рыхлых отложениях, которые обладают фрактальными свойствами, может быть записано в терминах дробной производной Герасимова-Капуто порядка  $\alpha$  в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^\alpha A(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \bar{D} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \bar{\lambda} A(\xi, \tau) + \bar{\lambda} A_\infty, \quad (1)$$

где  $A = A(\xi, \tau)$  – объемная активность Rn, которая нам известна из экспериментальных данных;  $0 < \alpha < 1$  – дробный параметр, связанный с фрактальной размерностью геосреды;  $\tau = t/t_0$ ,  $\xi = x/l_0$  – безразмерные время и пространственная координата,  $t_0$  – среднее время «жизни» атома Rn;  $l_0$  – диффузионная длина;  $A(\xi, 0)$  – начальное распределение Rn;  $A_\infty$  – равновесное значение объемной активности радона (ОА Rn);  $D$  – коэффициент диффузии Rn в геосреде,  $\lambda$  – постоянная распада Rn;  $\bar{D} = Dt_0/l_0^2$  – безразмерный коэффициент диффузии;  $\bar{\lambda} = \lambda t_0$  – безразмерная постоянная распада.

Нахождение значений параметра  $\alpha(\tau)$  и его вариаций во времени из уравнения (1), которое при  $\alpha = \text{const}$  является уравнением субдиффузии [1]-[2], по известным экспериментальным значениям ОА Rn  $A(\xi, \tau)$ , является целью данной работы.

## МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) можно упростить, если аппроксимировать диффузионный член следующим соотношением:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\xi \approx A(\tau) \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1) приходим к уравнению

$$\partial_{0\tau}^{\alpha(\tau)} A(\eta) = (\bar{D} - \bar{\lambda})A(\tau) + \bar{\lambda}A_{\infty} \quad (3)$$

Известно, что среднее время “жизни” атома Rn  $t_0 = 1/\lambda$ , поэтому уравнение (3) упрощается и его можно записать так:

$$\partial_{0\tau}^{\alpha(\tau)} A(\eta) = A_{\infty} \quad (4)$$

Начальное условие для (2) запишется так:

$$A(0) = A_0 \quad . \quad (5)$$

Необходимо отметить, что упрощение уравнения (3) позволяет получить простое решение, которое в первом приближении можно рассматривать как математическую модель переноса радона во фрактальной среде.

Считая в (4), что параметр  $\alpha(\tau)$  изменяется от 0 до 1 дискретно, т.е.  $\alpha(\tau) = \alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – количество экспериментальных данных. Мы получим  $k$  уравнений вида:

$$\partial_{0\tau}^{\alpha_k} A(\eta) = A_{\infty}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) согласно условию (5) можно получить интегральным преобразованием Лапласа

$$A(\tau) = A_0 + \frac{A_{\infty} \tau^{\alpha_k + 1}}{\Gamma(\alpha_k)} \quad . \quad (7)$$

Левая часть уравнения (7) известна, т.е.  $A(\tau) = A_k$ . Известны значения  $A_{\infty} = A_{\infty k}$ , которые мы вычислим с помощью методики работы [3] по формуле:

$$A_{\infty k} = \frac{A_1(\tau)}{1 - T}.$$

$A_1(\tau)$  – значения объемной активности радона на глубине  $z_1$ ;  $A_2(\tau)$  – значения объемная активность радона на глубине  $z_2$ , причем  $z_2 = k \cdot z_1$ ,  $k$  – коэффициент пропорциональности;  $T$  – численно находится из уравнения  $XT^k - T + (1 - X) = 0$ ,  $X = A_1(\tau)/A_2(\tau)$ .

Поэтому уравнение (7) мы можем записать в виде:

$$R_k(\tau) = \frac{\tau^{\alpha_k + 1}}{\Gamma(\alpha_k)}, \quad R_k(\tau) = \frac{A_k - A_0}{A_{\infty k}}. \quad (8)$$

Следующий этап – оценка значений  $\alpha_k$  по известным данным согласно выражению (8). Оценить значения  $\alpha_k$  можно с помощью метода наименьших квадратов или с помощью численных методов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Было проведено сопоставление расчетных значений  $\alpha_k$ , полученных по предложенной методике (8) и ОА Rn, зарегистрированной на станциях сети Петропавловск-Камчатского полигона, с сейсмичностью Южной Камчатки. С целью лучшей визуализации обоих параметров рассматривалась относительная ОА Rn, которая бралась

как отношение текущих значений  $N$  к максимальному значению  $N_0$  на рассматриваемом участке. Рассматривалось проявление сильных землетрясений Южной Камчатки с  $M > 5,5$  в период с 2005-2010 гг. в динамике обоих параметров.

На рис.2 приведены кривые относительной ОА  $R_p$  и расчетные значения показателя  $\alpha_k$  для землетрясения 4 августа 2004 г. с  $M=5,6$ , произошедшее на расстоянии 116 км.

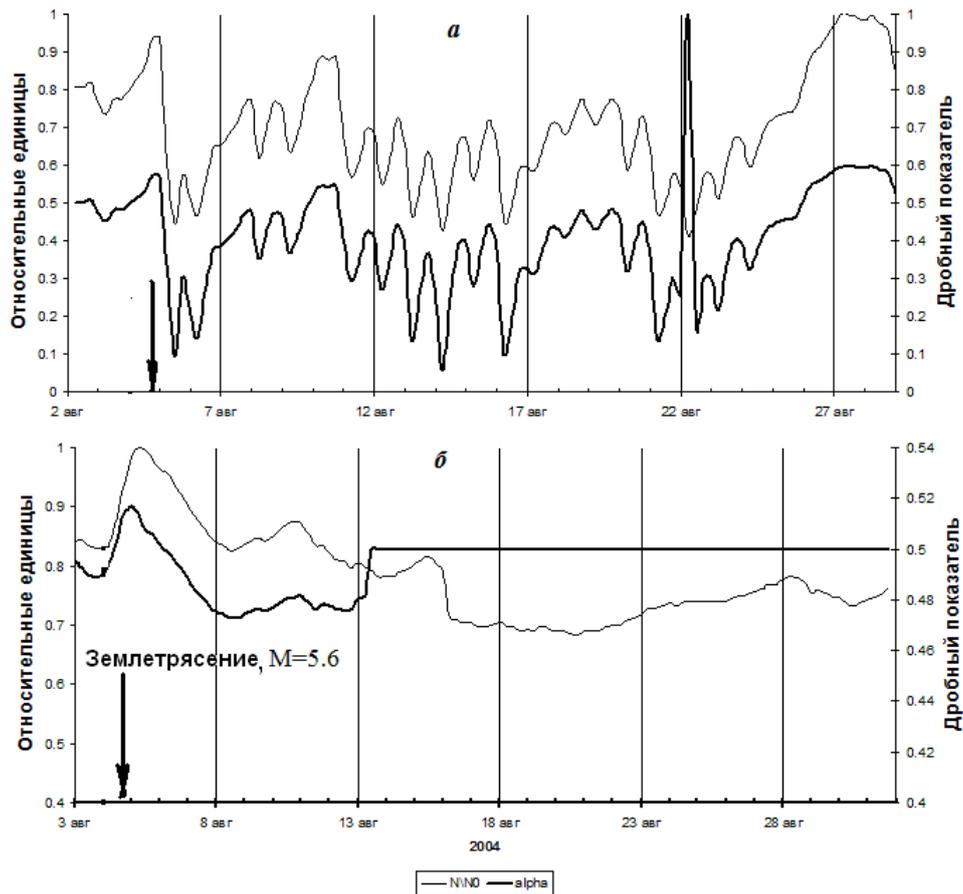


Рис. 1. Кривые относительной ОА  $R_p$  и значений дробного показателя  $\alpha_k$  в окрестностях землетрясения 4 августа 2004 г.: а) пункт Левая Авача; б) пункт ИКИР.

В значениях ОА  $R_p$  перед событием с  $M = 5,6$ , произошедшим 4 августа 2004 г., в пунктах ЛВЧ и ИКР выделяются бухтообразные аномалии со временем упреждения около суток (рис.2). Эти аномалии, на основании синфазности их появления в трех пунктах – ИКИР, ЛВЧ, ПРТ, связываются с геодеформационной волной, возникшей на последней стадии подготовки землетрясения в результате квазипластического течения геометериала. При скорости распространения геодеформационной волны 30 км/сутки возникновение волны произошло за четверо суток до события [4].

В пункте ЛВЧ наблюдается синхронное поведение кривых для обоих параметров (рис. 2), а для пункта ИНС предвестниковая аномалия в значениях показателя  $\alpha_k$  выглядит достаточно убедительно (рис. 2), с выходом на стационарный уровень 13 августа. Это указывает на то, что пористые свойства рыхлых отложений при прохождении геодеформационной волны изменяются и дробный показатель  $\alpha_k$  может служить еще одним параметром для выделения и формализации предвестниковых аномалий.

Рассмотрим сейсмичность Авачинского залива в июле – августе 2010 г. 30 июля 2010 г. произошло землетрясение в районе Авачинской котловины с  $M > 6.3$ , а спустя две недели 15 августа в районе мыса Шипунский произошел рой землетрясений с  $M_{max} = 5.8$  (53,56 с.ш.; 160,12 в.д.).

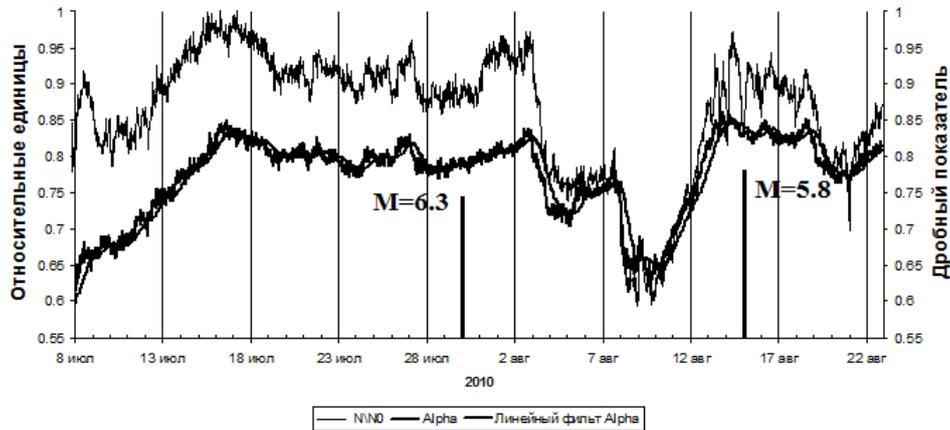


Рис. 2. Кривые относительной OA Rp и значений дробного показателя  $\alpha_k$  в окрестностях землетрясения 30 июля 2010 г. в пункте КРМ.

На рис.3 представлены кривые экспериментальных данных в пункте КРМ: относительной OA Rp и рассчитанных по формуле (8) значений  $\alpha_k$ , а вертикальными линиями отмечены моменты землетрясений. На обеих кривых можно выделить следующие этапы:

- 1 - начиная с 8 июля, наблюдается рост значений  $\alpha$  от 0,6 до 0,85 вплоть до 17 июля;
- 2 - с 18 июля по 3 августа происходит незначительные изменения параметра  $\alpha$  около 0,8;
- 3 - с 4 августа до 10 августа резкое снижение  $\alpha$  от 0,825 до 0,63.
- 4 - с 11 августа до 13 августа резкий рост значений  $\alpha$  от 0,63 до 0,85.
- 5 - с 14 по 20 августа незначительные отклонения значений  $\alpha$  от 0,8.

Анализируя выделенные этапы поведения дробного показателя  $\alpha$  и, сопоставляя даты наступления землетрясений можно сделать следующий вывод. Изменение параметра  $\alpha$ , по-видимому, обусловлено деформационными процессами за счет дилатансии геоматериала, которая возникает на последней стадии подготовки землетрясений. В пользу этого также говорит, что время упреждения для землетрясения 30 июля с  $M = 6,3$  составляет около 20 суток, а для землетрясения 15 августа с  $M = 5,8$  всего 9 суток.

На рис. 4 представлены: расчетная кривая значений дробного параметра  $\alpha$ , ее отфильтрованная кривая, относительная OA Rp за июль 2008 г. по данным станции ИНС. Стрелкой отмечено землетрясение с  $M=6.2$ , которое произошло 24 июля 2008 г. в районе Южной Камчатки (50.97 с.ш., 157.58 в.д.)

На рис.4 видно, что со 2 июля по 8 июля наблюдается рост значений  $\alpha$  от 0,7 до 0,9. С 9 июля по 15 происходит незначительное колебание  $\alpha$  около значения 0,9. Далее с 16 июля до 20 июля наблюдается снижение  $\alpha$  от 0,9 до 0,8 затем незначительный рост до 0,85 вплоть до 31 июля.

В этом случае, также как и перед землетрясением 30 июля 2010 г., происходит увеличение значений дробного показателя  $\alpha$  почти на 30% за 25 суток до события.

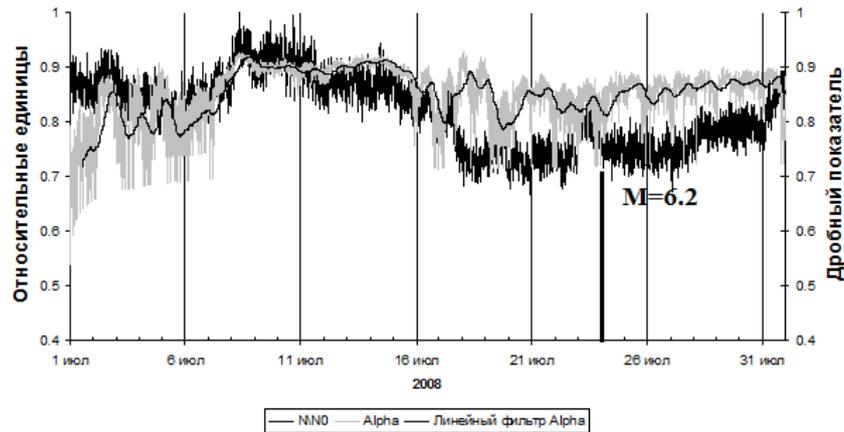


Рис. 3. Кривые относительной ОА  $R_n$  и значений дробного показателя  $\alpha_k$  в окрестностях землетрясения 24 июля 2010 г. по данным пункта ИНС.

На рис.5 представлены экспериментальные данные по данным пункта ИНС за май-июнь 2007 г. Стрелкой отмечено землетрясение с  $M=6.4$  (52.14 с.ш, 157.29 в.д.), которое произошло в южной части Камчатского полуострова.

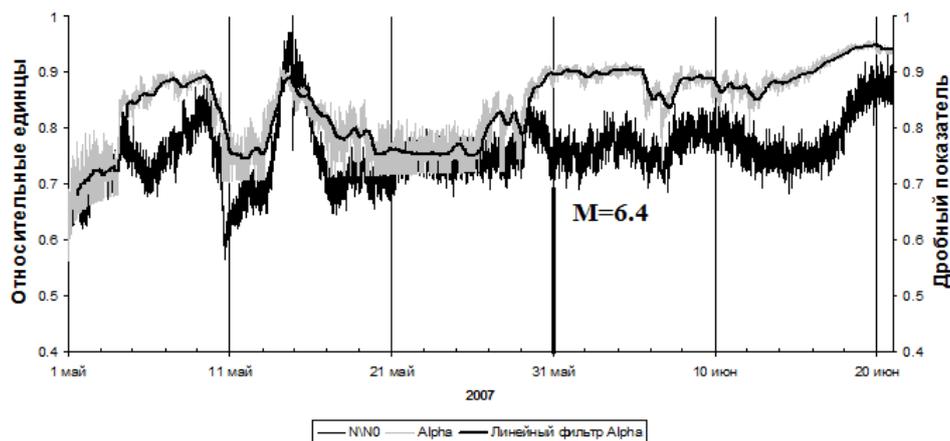


Рис. 4. Кривые относительной ОА  $R_n$  и значений дробного показателя  $\alpha_k$  в окрестностях землетрясения 31 мая 2007 г. по данным пункта ИНС.

На рис.5 видно, что перед землетрясением за 30 суток наблюдается резкий рост  $\alpha$  от 0,7 до 0,9, со значительными по амплитуде вариациями в дальнейшем. Так же можно заметить, так называемое, плато длительностью 5 суток, когда значения  $\alpha$  меняются незначительно около значения 0,75. После плато значение  $\alpha$  возрастает до 0,9 и происходит землетрясение. В этом случае кривая значений  $\alpha$  напоминает логистическую кривую [5], которая присуща социальным, историческим и экономическим процессам.

На рис. 6. показаны кривые относительной ОА  $R_n$  и значений дробного показателя  $\alpha_k$  за период 2005-2010 г. по данным пункта ПРТ. Жирными линиями отмечены землетрясения Южной Камчатки с  $M>5.5$ . В 2005 году 7 июля в Авачинском заливе (52.87 с.ш.,160.10 в.д.) произошло землетрясение с  $M=5.8$ . В 2006 году в основном сейсмическая активность проявлялась в июле-августе. Сильное землетрясение в этот период произошло 24 августа с  $M=6.5$  у Южного побережья Камчатки (51.15 с.ш.,

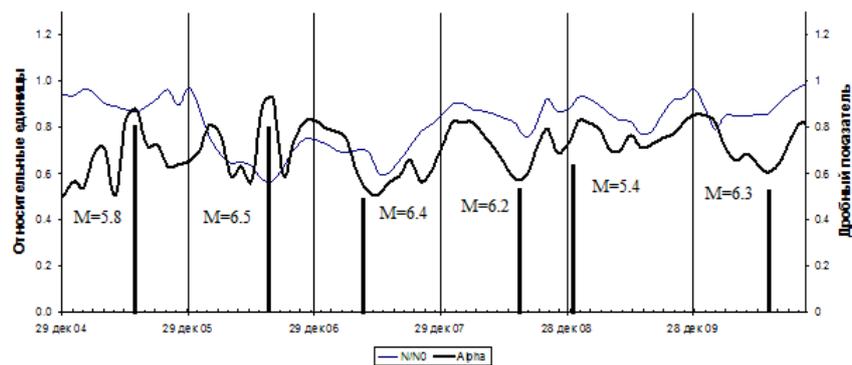


Рис. 5. Кривые относительной OA Rp и значений дробного показателя  $\alpha_k$  за период 2005-2010 г. по данным пункта ПРТ.

157.52). В 2007 году сильное землетрясение произошло 30 мая на территории Камчатского полуострова (52.14 с.ш., 157.29 в.д.) с  $M=6.4$ . В 2008 году сейсмическая активность увеличилась: произошли три события с  $M \geq 5.5$ . 6 марта (51.52 с.ш., 156.55 в.д.)  $M=5.5$ , 24 июля (50.97 с.ш., 157.58 в.д.)  $M=6.2$ , 18 сентября (51.94 с.ш., 158.36 в.д.)  $M=5.9$ . В 2009 году землетрясений с  $M > 5.5$  не было, но 14 января произошло землетрясение с  $M=5.4$  (52.27 с.ш., 159.29 в.д.). В 2010 году усиление сейсмической активности пришлось на июль месяц, 30 июля в районе Авачинского залива (52.50 с.ш., 159.84 в.д.) произошло землетрясение с  $M=6.3$ .

На рис.6 видно, что времена указанных выше землетрясения совпадают либо с увеличением значений дробного показателя  $\alpha$  либо с его уменьшением. С учетом того, что этот показатель связан с фрактальной размерностью среды, то он отражает структурное изменение геосреды под действием деформаций. Разнополярность аномалий указывает на то, что структура деформирования среды является мозаичной и фрактальной.

Как показано в работе [6], резкие изменения, в том числе кратковременные, напряженно - деформированного состояния контакта между блоками горной породы приводят к возникновению межблоковых перемещений. Которые, в свою очередь, проявляются в виде «квазивязкого» течения материала земной коры. По-видимому, процесс ползучести за счет квазивязкого течения горных масс порождает «геодеформационные волны», обусловленные взаимодействием отдельных блоков геологической среды. Геодеформационные волны изменяют структуру рыхлых отложений, что отражается в изменении показателя  $\alpha$  и OA Rp. В зависимости от расположения пунктов регистрации относительно границ отдельных блоков, аномалии имеют различную форму (бухтообразные, ступенчатые) и различную полярность в зависимости от геолого-тектонических условий того или иного пункта регистрации относительно очага землетрясения.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выявленная чувствительность параметра  $\alpha$  к изменениям напряженно-деформированного состояния указывает на то, что этот параметр может служить для выделения и формализации предвестниковых аномалий сильных землетрясений в поле подпочвенного Rp. С помощью этого параметра можно осуществлять мониторинг деформационных процессов в геосреде. Предложенная методика совместно с другими известными ме-

тодами анализа временных рядов увеличивает эффективность краткосрочного прогноза землетрясений района Южной Камчатки с  $K > 5,5$ .

В развитии модели (1) необходимо учитывать параметр  $\tilde{D} = \bar{D} - \bar{\lambda}$ , который отвечает диффузионный механизм. Такое уточнение приведет к значительному усложнению решения уравнения (1) и к определенным трудностям в реализации алгоритма.

## Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Meilanov R.P. The Fractal Concept in the Theory of a Thermal Field of the Earth // Thermal Field of the Earth and Methods of its study / Receiver of the proceedings. М.: Publishing house RUDN, 2000, pp.63-68. (In Russian).
3. Яковлева, В.С. Процессы переноса радона в неравновесных средах: Автореф. канд. физ.- мат. наук. – Томск: ТПУ, 2002. – 23 с.
4. Firstov, P.P., Yakovleva V.S., Shirokov et. al The nexus of soil radon and hydrogen dynamics and seismicity of the northern flank of the Kuril - Kamchatka subduction zone // Annals of Geophysics. 2007.V. 50. N 4. P.
5. Нахушев А.М., Кенетова Р.О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. – Нальчик: Эль-Фа, 1998. – 172 с.
6. Попруженко С.В., Зубин М.И. Тектоника и некоторые особенности сейсмичности шельфовой зоны Авачинского залива и прилегающих районов // Вулканология и сейсмология. 1997. №2. С. 74-86.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 5.12.2011