Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 27-38. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-27-38

УДК 517.95 + 519.8

# О МОДЕЛИ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**К.У. Хубиев**

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: khubiev_math@mail.ru

Рассмотрены модели нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа как с характеристическим, так и с нехарактеристическим изменением типа, для предложенных в качестве моделей уравнений исследованы краевые задачи, выписаны решения задач в явном виде.

*Ключевые слова: модель уравнения, нагруженное уравнение, уравнение гиперболо-параболического типа, краевая задача*



MSC 35M10

# ABOUT MODEL OF LOADED PARTIAL HYPERBOLIC-PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

**K.U. Khubiev**

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: khubiev_math@mail.ru

We studied a models of loaded equation of mixed hyperbolic-parabolic type with characteristicly and not characteristicly modifying line. For the proposed equation models boundary value problem is considered and solutions is written out.

*Key words: equation model, loaded equation, hyperbolic-parabolic equation, boundary value problem*

### Введение

В работе рассмотрены модели нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа как с характеристическим, так и с нехарактеристическим изменением типа. В первом пунтке исследована модель нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа, меняющего свой типа на характеристической линии. Во втором пункте исследуется модель нагруженного гиперболо-параболического типа с нехарактеристическим изменением типа. В третьем пункте рассмотренна смешанная краевая задача для уравнения плоской волны в прямоугольной плоскости. Для предложенных в качестве моделей уравнений смешанного типа исследованы краевые задачи, выписаны решения задач в явном виде.

В работе [1] А.М. Нахушев предожил метод приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, основанный на редукции к нагруженным уравнениям (см. [2]). Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений такого вида при $y>0$ были рассмотрены в работах [3] - [5].

## Модель нагруженного гиперболо-параболического уравнения с характеристическим изменением типа

В качестве модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка с характеристическим изменением типа может выступить следующее уравнение:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^r u(x,y)dx, \ \ 0<x<r, \ 0 \le y \le \beta_2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^r u(x,y)dx, \ \ 0<x<r, \ \beta_1 \le y \le 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = const, r = const < \infty, \beta_2 = const > 0, \beta = const, \beta_1 = const < 0$, $u = u(x,y)$ – неизвестная функция.

Обозначим через $\delta(y) = \int\limits_0^r u(x,y)dx$; $\quad \Omega = \{(x,y) : 0 < x < r, \beta_1 < y < \beta_2\}$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области $\Omega$, $\Omega^+ = \Omega \cap \{y>0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{y<0\}$.

**Определение.** *Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию* $u = u(x,y)$ *из класса* $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega^+)$, $\delta(y) \in C[\beta_1, \beta_2] \cap C^1]\beta_1, \beta_2[$, *удовлетворяющую уравнению (1) в* $\Omega^+ \cup \Omega^-$.

Уравнение (1) при $y>0$ совпадает с уравнением Тарга [6, с. 75]. В [7] выписано решение уравнения (1) в классе $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ при довольно существенных ограничениях на решение на границе области.

Когда $\beta_1 < y < 0$, оно принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \beta \delta'(y), \tag{2}$$

где $\delta'(y) = \int\limits_0^r u_y(x,y)dx$.

Из (2) следует, что

$$u(x,y) = u(x,0) + u(0,y) - u(0,0) + \beta x[\delta(y) - \delta(0)], \tag{3}$$

т.е. (3) – решение задачи Гурса для волнового уравнения с правой частью $\beta\delta'(y)$.

Пусть
$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad \beta_1 \le y \le \beta_2, \tag{4}$$
где $\varphi_0(y)$ – заданная функция из класса $C[\beta_1,\beta_2] \cap C^1]\beta_1,\beta_2[$.

Обозначим через $\tau(x) = u(x,0)$. Тогда $\tau(0) = \varphi_0(0)$, а (3) примет вид
$$u(x,y) = \tau(x) + \varphi_0(y) - \varphi_0(0) + \beta x[\delta(y) - \delta(0)], \;\; \beta_1 \le y \le 0. \tag{5}$$

Из (1) при $y > 0$ заключаем:
$$u(x,y) = \frac{\alpha x^2}{2}\delta'(y) + B(y)x + C(y), \tag{6}$$
где $B(y), C(y)$ – произвольные функции из класса $C[0,\beta_2]$.

Из (6) и (4) непосредственно получаем, что $C(y) = \varphi_0(y)$. Пусть
$$u(r,y) = \varphi_r(y), \;\; 0 \le y \le \beta_2, \tag{7}$$
где $\varphi_r(y)$ – заданная функция из класса $C[0,\beta_2] \cap C^1[0,\beta_2[, \quad \tau(r) = \varphi_r(0)$.

Тогда из (6) и (7) непосредственно получаем, что
$$B(y) = \frac{\varphi_r(y) - \varphi_0(y)}{r} - \frac{\alpha r}{2}\delta'(y).$$

Тогда (6) примет следующий вид:
$$u(x,y) = \frac{\alpha x(x-r)}{2}\delta'(y) + \frac{x}{r}\varphi_r(y) + \frac{r-x}{r}\varphi_0(y), \quad 0 \le y \le \beta_2. \tag{8}$$

Из (8) при $y \to +0$ получим, что
$$\tau(x) = \frac{\alpha x(x-r)}{2}\delta'(0) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) + \frac{r-x}{r}\varphi_0(0). \tag{9}$$

Учитывая, что решение ищется в классе $C(\bar{\Omega})$, и подставив $\tau(x)$ из (9) в (5), при $\beta_1 \le y \le 0$ получаем
$$u(x,y) = \frac{\alpha x(x-r)}{2}\delta'(0) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) + \frac{r-x}{r}\varphi_0(0) + \varphi_0(y) - \varphi_0(0) + \beta x[\delta(y) - \delta(0)]. \tag{10}$$

Из (10) следует, что
$$\delta(y) = \frac{-\alpha r^3}{12}\delta'(0) + \frac{r}{2}[\varphi_r(0) - \varphi_0(0)] + r\varphi_0(y) + \frac{\beta r^2}{2}[\delta(y) - \delta(0)],$$
откуда при $2 - \beta r^2 \ne 0$ непосредственно получаем
$$\delta(y) = \frac{2r\varphi_0(y)}{2-\beta r^2} + \frac{r[\varphi_r(0) - \varphi_0(0)]}{2-\beta r^2} - \frac{\alpha r^3\delta'(0)}{6(2-\beta r^2)} - \frac{\beta r^2\delta(0)}{2-\beta r^2}. \tag{11}$$

Из (11) при $y \to -0$ имеем
$$\delta(0) = \frac{2r\varphi_0(0)}{2-\beta r^2} + \frac{r[\varphi_r(0) - \varphi_0(0)]}{2-\beta r^2} - \frac{\alpha r^3\delta'(0)}{6(2-\beta r^2)} - \frac{\beta r^2\delta(0)}{2-\beta r^2},$$

или

$$\delta(0) = -\frac{\alpha r^3}{12}\delta'(0) + \frac{r}{2}[\varphi_r(0) + \varphi_0(0)].$$

Из (11) же следует, что

$$\delta'(y) = \frac{2r}{2-\beta r^2}\varphi_0'(y),\ \beta_1 \le y \le 0,$$

и, соответственно,

$$\delta'(0) = \frac{2r}{2-\beta r^2}\varphi_0'(0). \tag{12}$$

С учетом (12) получаем

$$\delta(0) = -\frac{\alpha r^4}{6(2-\beta r^2)}\varphi_0'(0) + \frac{r}{2}[\varphi_r(0) + \varphi_0(0)], \tag{13}$$

$$\delta(y) = \frac{2r\varphi_0(y)}{2-\beta r^2} + \frac{r}{2}\varphi_r(0) - \frac{r(2+\beta r^2)}{2(2-\beta r^2)}\varphi_0(0) - \frac{\alpha r^4}{6(2-\beta r^2)}\varphi_0'(0),\ \beta_1 \le y \le 0. \tag{14}$$

Подставляя (12) - (14) в (10), с учетом того, что $\delta(y) - \delta(0) = \frac{2r}{2-\beta r^2}[\varphi_0(y) - \varphi_0(0)]$, получим, что решение уравнения (1) при $\beta_1 \le y \le 0$, удовлетворяющее условию (4), задается формулой

$$u(x,y) = \frac{2-\beta r^2 + 2\beta rx}{2-\beta r^2}\varphi_0(y) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) - \frac{x(2+\beta r^2)}{r(2-\beta r^2)}\varphi_0(0) + \frac{\alpha rx(x-r)}{2-\beta r^2}\varphi_0'(0), \tag{15}$$

а (9) примет вид

$$\tau(x) = \frac{\alpha rx(x-r)}{2-\beta r^2}\varphi_0'(0) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) + \frac{r-x}{r}\varphi_0(0). \tag{16}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том что (15) удовлетворяет уравнению (1) и условию (4).

На основании (8) имеем

$$\delta(y) = -\frac{\alpha r^3}{12}\delta'(y) + \frac{r}{2}\varphi_r(y) + \frac{r}{2}\varphi_0(y), \quad 0 \le y \le \beta_2,$$

или, при $\alpha \ne 0$,

$$\delta'(y) + \lambda\delta(y) = f(y), \tag{17}$$

где $\lambda = \dfrac{12}{\alpha r^3}$, $\quad f(y) = \dfrac{\lambda r}{2}[\varphi_r(y) + \varphi_0(y)] = \dfrac{6}{\alpha r^2}[\varphi_r(y) + \varphi_0(y)]$.

Решая задачу Коши (13) для уравнения (17), получаем

$$\delta(y) = e^{-\lambda y}\delta(0) + \int\limits_0^y e^{-\lambda(y-\eta)}f(\eta)d\eta, \quad 0 \le y \le \beta_2,$$

откуда следует

$$\delta'(y) = -\lambda e^{-\lambda y}\delta(0) + f(y) - \lambda\int\limits_0^y e^{-\lambda(y-\eta)}f(\eta)d\eta, \quad 0 \le y \le \beta_2. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (8), получаем, что решение уравнения (1) при $0 \le y \le \beta_2$, удовлетворяющее условиям (4), (7), задается формулой

$$u(x,y) = x(x-r)\left[\left(\frac{\alpha r \varphi_0'(0)}{2-\beta r^2} - \frac{3}{r^2}[\varphi_r(0)+\varphi_0(0)]\right)e^{-\frac{12y}{\alpha r^3}} + \frac{3}{r^2}[\varphi_r(y)+\varphi_0(y)]\right] -$$

$$-\frac{36x(x-r)}{\alpha r^5}\int\limits_0^y e^{-\frac{12(y-\eta)}{\alpha r^3}}[\varphi_r(\eta)+\varphi_0(\eta)]d\eta + \frac{x}{r}\varphi_r(y) + \frac{r-x}{r}\varphi_0(y), \quad 0 \le y \le \beta_2. \qquad (19)$$

Легко убедиться, что (19) удовлетворяет уравнению (1), и что из (19) при $y \to +0$ получается (16).

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 1.** *Если $\beta r^2 \ne 2$, то единственное регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad \varphi_0(y) \in C[\beta_1,\beta_2] \cap C^1[0,\beta_2[\, \cap C^2]\beta_1,0], \quad \beta_1 \le y \le \beta_2,$$

$$u(r,y) = \varphi_r(y), \quad \varphi_r(y) \in C[0,\beta_2] \cap C^1[0,\beta_2[, \quad 0 \le y \le \beta_2,$$

*где $\varphi_0(y)$, $\varphi_r(y)$ – заданные функции, задается формулами*

$$u(x,y) = \frac{2-\beta r^2 + 2\beta r x}{2-\beta r^2}\varphi_0(y) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) - \frac{x(2+\beta r^2)}{r(2-\beta r^2)}\varphi_0(0) + \frac{\alpha r x(x-r)}{2-\beta r^2}\varphi_0'(0), \ \beta_1 \le y \le 0,$$

$$u(x,y) = x(x-r)\left[\left(\frac{\alpha r \varphi_0'(0)}{2-\beta r^2} - \frac{3}{r^2}[\varphi_r(0)+\varphi_0(0)]\right)e^{-\frac{12y}{\alpha r^3}} + \frac{3}{r^2}[\varphi_r(y)+\varphi_0(y)]\right] -$$

$$-\frac{36x(x-r)}{\alpha r^5}\int\limits_0^y e^{-\frac{12(y-\eta)}{\alpha r^3}}[\varphi_r(\eta)+\varphi_0(\eta)]d\eta + \frac{x}{r}\varphi_r(y) + \frac{r-x}{r}\varphi_0(y), \quad 0 \le y \le \beta_2.$$

## Модель нагруженного гиперболо-параболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа

В качестве модели нагруженного уравнения, меняющего свой тип на нехарактеристической линии, рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} + a_1 \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^r u(x,y)dx = 0, \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y < 0 \end{cases} \qquad (20)$$

в области $\Omega$, ограниченной отрезками $AA_0$, $BB_0$, $A_0B_0$ прямых $x=0$, $x=r$, $y=\beta_2$ соответственно при $y>0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x+y=0$, $BC: x-y=r$ при $y<0$.

Обозначим через $\Omega^+$, $\Omega^-$ параболическую и гиперболическую части области $\Omega$ соответственно, а через $J$ – интервал $0<x<r$ прямой $y=0$, через $\delta(y) = \int\limits_0^r u(x,y)dx$, $0 \le y \le \beta_2$.

**Определение.** *Под регулярным решением уравнения (20) будем понимать функцию $u = u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega^+)$, $\delta(y) \in C[0,\beta_2] \cap C^1[0,\beta_2[$, удовлетворяющую уравнению (20) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$.*

Аналогом задачи Трикоми для уравнения (20) в области $\Omega$ будет

**Задача T.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(x,y)$ уравнения* (20), *удовлетворяющее краевым условиям*:

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \qquad u(r,y) = \varphi_r(y), \qquad 0 \le y \le \beta_2, \tag{21}$$
$$u(x/2,-x/2) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{22}$$

*где $\varphi_0(y), \varphi_r(y), \psi(x)$ — заданные функции, причем $\varphi_0(0) = \psi(0)$.*

Действительно, пусть существует решение $u(x,y)$ задачи T. Обозначим через

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \nu(x) = u_y(x,0), \tag{23}$$

тогда

$$\tau(0) = \varphi_0(0), \qquad \tau(r) = \varphi_r(0). \tag{24}$$

Переходя в уравнении (20) к пределу при $y \to +0$, и учитывая, что $u_y(x,0) \in L(J)$, получим функциональное соотношение, принесенное из параболической части $\Omega^+$ смешанной области $\Omega$

$$\tau''(x) + a_1 \int\limits_0^r \nu(\xi)d\xi = 0. \tag{25}$$

Решение задачи Коши (23) для уравнения (20) в $\Omega^-$ представимо в виде [8]:

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)d\xi. \tag{26}$$

Записав условие (22) с помощью формулы (26), в $\Omega^-$ получим:

$$\tau(x) + \tau(0) - \int\limits_0^x \nu(\xi)d\xi = 2\psi(x), \quad 0 \le x \le r. \tag{27}$$

Дифференцируя (27), с учетом того, что $\tau(0) = \varphi_0(0) = \psi(0)$, из $\Omega^-$ получим

$$\nu(x) = \tau'(x) - 2\psi'(x). \tag{28}$$

Из (25) и (28) получим уравнение

$$\tau''(x) + a_1 \int\limits_0^r \tau'(\xi)d\xi = 2a_1 \int\limits_0^r \psi'(\xi)d\xi,$$

или, с учетом (24),

$$\tau''(x) = g, \tag{29}$$

где $g = 2a_1[\psi(r) - \psi(0)] - a_1[\varphi_r(0) - \varphi_0(0)] = 2a_1\psi(r) - a_1[\varphi_r(0) + \varphi_0(0)]$.

Задача Дирихле (24) для уравнения (29) имеет единственное решение

$$\tau(x) = gx^2/2 + q_1 x + q_2, \tag{30}$$

где

$$q_1 = \frac{\varphi_r(0)-\varphi_0(0)}{r} - \frac{gr}{2} = \frac{2+a_1r^2}{2r}\left[\varphi_r(0)-\varphi_0(0)\right] - a_1r\left[\psi(r)-\psi(0)\right] =$$

$$= \frac{2+a_1r^2}{2r}\varphi_r(0) - \frac{2-a_1r^2}{2r}\varphi_0(0) - a_1r\psi(r), \qquad q_2 = \varphi_0(0).$$

Т.е.

$$\tau(x) = a_1x(x-r)\Big(\psi(r)-\psi(0)-\frac{\varphi_r(0)-\varphi_0(0)}{2}\Big) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) - \frac{x-r}{r}\varphi_0(0) =$$

$$= a_1x(x-r)\Big(\psi(r)-\frac{\varphi_r(0)}{2}-\frac{\varphi_0(0)}{2}\Big) + \frac{x}{r}\varphi_r(0) - \frac{x-r}{r}\varphi_0(0). \tag{31}$$

Из (28) получаем, что

$$\nu(x) = gx - 2\psi'(x) + q_1 =$$

$$= \big(2a_1\psi(r) - a_1[\varphi_r(0)+\varphi_0(0)]\big)x - 2\psi'(x) + \frac{2+a_1r^2}{2r}\varphi_r(0) - \frac{2-a_1r^2}{2r}\varphi_0(0) - a_1r\psi(r). \tag{32}$$

Из (30) и (32) очевидно, что однородная задача T будет иметь в $\Omega^-$ только тривиальное решение $u(x,y)\equiv 0$ как решение задачи Коши $\tau(x)\equiv 0, \quad \nu(x)\equiv 0$ для уравнения (20).

После нахождения $\tau(x)$ и $\nu(x)$ решение задачи T в $\Omega^-$ задается формулой (26).

Исследуем решение задачи T в $\Omega^+$. Требуется найти решение уравнения

$$u_{xx} = -a_1\delta'(y), \tag{33}$$

удовлетворяющее краевым условиям (21) и начальному условию

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{34}$$

где $\varphi_0(y), \varphi_r(y), \tau(x)$ — известные функции, причем $\varphi_0(0) = \tau(0), \quad \varphi_r(0) = \tau(r)$.

Общее решение уравнения (33) как решение обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $y$ имеет вид

$$u(x,y) = -a_1\delta'(y)\frac{x^2}{2} + q_1(y)x + q_2(y), \tag{35}$$

где $q_1(y), q_2(y)$ - произвольные функции из класса $C[0,h]$.

Удовлетворяя (35) условиям (21), получим

$$q_1(y) = \frac{\varphi_r(y)-\varphi_0(y)}{r} + \frac{a_1\delta'(y)r}{2}, \quad q_2(y) = \varphi_0(y),$$

и формула (35) примет вид:

$$u(x,y) = \frac{a_1x(r-x)}{2}\delta'(y) + \frac{x}{r}\varphi_r(y) - \frac{x-r}{r}\varphi_0(y). \tag{36}$$

Из (36) с учетом обозначения $\delta(y) = \int\limits_0^r u(x,y)dx$ после несложных преобразований получим

$$\delta(y) = \frac{a_1r^3}{12}\delta'(y) + \frac{r}{2}\varphi_r(y) + \frac{r}{2}\varphi_0(y),$$

или, при $a_1 \neq 0$,

$$\delta'(y) - \lambda\delta(y) = f(y), \tag{37}$$

где $\lambda = \dfrac{12}{a_1 r^3}$, $\quad f(y) = -\dfrac{\lambda r}{2}[\varphi_r(y) + \varphi_0(y)]$, причем, с учетом (12), имеем

$$\delta(0) = \int_0^r u(\xi,0)d\xi = \int_0^r \tau(\xi)d\xi = \int_0^r \Big(g\xi^2/2 + q_1\xi + q_2\Big)d\xi = \frac{r^3}{6}g + \frac{r^2}{2}q_1 + rq_2 =$$

$$= -\frac{a_1r^3}{6}[\psi(r) - \psi(0)] + \frac{a_1r^3}{12}[\varphi_r(0) - \varphi_0(0)] + \frac{r}{2}[\varphi_r(0) + \varphi_0(0)].$$

Решая задачу Коши для уравнения (37), получаем

$$\delta(y) = e^{\lambda y}\delta(0) + \int_0^y e^{\lambda(y-\eta)} f(\eta)d\eta,$$

откуда следует

$$\delta'(y) = \lambda e^{\lambda y}\delta(0) + f(y) + \int_0^y \lambda e^{\lambda(y-\eta)} f(\eta)d\eta.$$

Отсюда видно, что при однородной задаче Т $\delta'(y) = 0$.

Из (36) при $y \to 0$ имеем

$$\tau(x) = u(x,0) = -a_1x(x-r)\frac{\delta'(0)}{2} + \frac{x}{r}\varphi_r(0) - \frac{x-r}{r}\varphi_0(0), \tag{38}$$

где

$$\delta'(0) = \lambda\delta(0) + f(0) = -2[\psi(r) - \psi(0)] + [\varphi_r(0) - \varphi_0(0)].$$

Из (32) и (38) видно, что $\lim\limits_{y\to+0} u(x,y) = \lim\limits_{y\to-0} u(x,y) = \tau(x)$.

Далее решение задачи Т в $\Omega^+$ задается формулой (36). Очевидно, что однородная задача, соответствующая задаче Т, будет иметь в $\Omega^+$ только тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** *Если $\varphi_0(y), \varphi_r(y) \in C[0,\beta_2] \cap C^1]0,\beta_2[$, $\quad \psi(x) \in C^1[0,r] \cap C^2]0,r[$, то задача Т имеет, и притом единственное решение, которое в $\Omega^-$ задается формулой*

$$u(x,y) = \psi(x-y) - \psi(x+y) + a_1(x+y)(x+y-r)\psi(r) -$$

$$-\frac{x+y}{2r}\Big(a_1r(x+y) - a_1r^2 - 2\Big)\varphi_r(0) + \Big[1 - \frac{x+y}{2r}\Big(a_1r(x+y) - a_1r^2 + 2\Big)\Big]\varphi_0(0),$$

*а в $\Omega^+$ – формулой*

$$u(x,y) = \frac{x(r-x)}{2r^2}e^{\frac{12y}{a_1r^3}}\Big[(a_1r^2+6)[\varphi_r(0) + \varphi_0(0)] - 2a_1r^2\psi(r)\Big] +$$

$$+\frac{x}{r}\Big[1 - \frac{3(r-x)}{r}\Big]\varphi_r(y) + \frac{r-x}{r}\Big[1 - \frac{3x}{r}\Big]\varphi_0(y) - \frac{36x(r-x)}{a_1r^5}\int_0^y e^{\frac{12(y-\eta)}{a_1r^3}}[\varphi_r(\eta) - \varphi_0(\eta)]d\eta.$$

## Смешанная краевая задача для уравнения плоской волны в прямоугольной области

Рассмотрим в области $D=\Omega^{+}\cup J$ нагруженное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_0^r u(x,y)dx, \tag{39}$$

где $\alpha=const>0$.

**Определение.** *Под регулярным решением уравнения (39) будем понимать функцию $u=u(x,y)$ из класса $C(\bar{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (39) в $D$.*

**Задача S.** *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения* (39)*, удовлетворяющее условиям* (21) *и условиям*

$$\int\limits_0^r u(x,0)dx=\bar{\tau},\quad \int\limits_0^r u_y(x,0)dx=\bar{\nu}, \tag{40}$$

*где $\varphi_0(y),\varphi_r(y)-$ заданные непрерывные функции, $\bar{\tau},\bar{\nu}-$ заданные постоянные.*

Пусть, как и в предыдущих пунктах, $\delta(y)=\int\limits_0^r u(x,y)dx$. Тогда уравнение (39) можно переписать в виде

$$u_{xx}=\alpha\delta''(y),$$

откуда непосредственно следует, что

$$u(x,y)=\alpha\delta''(y)\frac{x^2}{2}+A_1(y)x+B_1(y), \tag{41}$$

где $A_1(y)$ и $B_1(y)$ – произвольные функции независимой переменной $y$.

Из (41) получим

$$\delta(y)=\int\limits_0^r \alpha\delta''(y)\frac{x^2}{2}+A_1(y)x+B_1(y)dx=\alpha\delta''(y)\frac{r^3}{6}+A_1(y)\frac{r^2}{2}+B_1(y)r. \tag{42}$$

Перепишем (42) в виде

$$\delta''(y)-\frac{6}{\alpha r^3}\delta(y)=-\frac{6}{\alpha r^3}\left[A_1(y)\frac{r^2}{2}+B_1(y)r\right]=A_{12}(y),$$

или же

$$\delta''(y)-c^2\delta(y)=A_{12}(y), \tag{43}$$

где $c^2=\frac{6}{\alpha r^3},\quad A_{12}(y)=-\frac{6}{\alpha r^3}\left[A_1(y)\frac{r^2}{2}+B_1(y)r\right]$.

Решение уравнения (43) с учетом условий (40) представимо в виде [9, с. 99]

$$\delta(y)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i U_i(y;c^2)+\int\limits_0^y A_{12}(t)U_1(y-t;c^2)dt, \tag{44}$$

где $m = 2$, $\alpha_1 = \delta'(0) = \bar{\nu}$, $\alpha_2 = \delta(0) = \bar{\tau}$, $U_i$ совпадает с функцией Барретта:

$$U_1(y,c^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2(k-1)}y^{2k-1}}{\Gamma(2k)} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k+1}y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{c}\,\mathrm{sh}(cy),$$

$$U_2(y,c^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k-2}y^{2k-2}}{\Gamma(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k-2}y^{2k-2}}{(2k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}y^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{ch}(cy),$$

т.е. (44) принимает вид

$$\delta(y) = \bar{\tau}\,\mathrm{ch}(cy) + \frac{1}{c}\bar{\nu}\,\mathrm{sh}(cy) + \frac{1}{c}\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]A_{12}(t)dt. \tag{45}$$

Из (45) получаем

$$\delta'(y) = \bar{\tau}c\,\mathrm{sh}(cy) + \bar{\nu}\,\mathrm{ch}(cy) + \int_0^y \mathrm{ch}[c(y-t)]A_{12}(t)dt,$$

$$\delta''(y) = \bar{\tau}c^2\,\mathrm{ch}(cy) + \bar{\nu}c\,\mathrm{sh}(cy) + A_{12}(y) + c\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]A_{12}(t)dt. \tag{46}$$

Подставляя (46) в (41), получим

$$u(x,y) = \alpha\left[\bar{\tau}c^2\,\mathrm{ch}(cy) + \bar{\nu}c\,\mathrm{sh}(cy) + A_{12}(y) + c\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]A_{12}(t)dt\right]\frac{x^2}{2} + A_1(y)x + B_1(y). \tag{47}$$

Удовлетворяя (47) условию (21), непосредственно получим

$$B_1(y) = \varphi_0(y).$$

Относительно $A_1(y)$ получим

$$\frac{\alpha r^2}{2}\left[\bar{\tau}c^2\,\mathrm{ch}(cy) + \bar{\nu}c\,\mathrm{sh}(cy) + A_{12}(y) + c\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]A_{12}(t)dt\right] + A_1(y)r + B_1(y) = \varphi_r(y),$$

$$\frac{\alpha r^2}{2}A_{12}(y) + \frac{\alpha r^2}{2}c\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]A_{12}(t)dt + A_1(y)r = \varphi_r(y) - \varphi_0(y) - \frac{\alpha r^2}{2}\left[\bar{\tau}c^2\,\mathrm{ch}(cy) + \bar{\nu}c\,\mathrm{sh}(cy)\right].$$

Учитывая, что $A_{12}(y) = -\frac{3}{\alpha r}A_1(y) - \frac{6}{\alpha r^2}B_1(y)$, получаем:

$$-\frac{3r}{2}A_1(y) + rA_1(y) - \frac{3cr}{2}\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]A_1(t)dt =$$

$$= \varphi_r(y) + 2\varphi_0(y) + 3c\int_0^y \mathrm{sh}[c(y-t)]\varphi_0(t)dt - \frac{\alpha r^2}{2}\left[\bar{\tau}c^2\,\mathrm{ch}(cy) + \bar{\nu}c\,\mathrm{sh}(cy)\right].$$

$$A_1(y)+3c\int\limits_0^y \operatorname{sh}[c(y-t)]A_1(t)dt=f(y), \tag{48}$$

где

$$f(y)=\alpha r\left[\bar{\tau}c^2\operatorname{ch}(cy)+\bar{\nu}c\operatorname{sh}(cy)\right]-\frac{2}{r}[\varphi_r(y)+2\varphi_0(y)]-\frac{6c}{r}\int\limits_0^y \operatorname{sh}[c(y-t)]\varphi_0(t)dt.$$

Уравнение (48) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $A_1(y)$. Несложно проверить, что единственное решение уравнения (48) задается формулой

$$A_1(y)=f(y)-\frac{3c}{\sqrt{2}}\int\limits_0^y \sin\left[\sqrt{2}c(y-t)\right]f(t)dt.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 3.** *Пусть $\varphi_0(y),\varphi_r(y)\in C[0,\beta_2]\cap C^2]0,\beta_2[$. Тогда задача S имеет, и притом единственное решение, которое задается формулой*

$$u(x,y)=\alpha\left[\bar{\tau}c^2\operatorname{ch}(cy)+\bar{\nu}c\operatorname{sh}(cy)+A_{12}(y)+c\int\limits_0^y \operatorname{sh}[c(y-t)]A_{12}(t)dt\right]\frac{x^2}{2}+A_1(y)x+B_1(y),$$

*где* $A_{12}(y)=-\frac{6}{\alpha r^3}\left[A_1(y)\frac{r^2}{2}+B_1(y)r\right]$,

$$A_1(y)=f(y)-\frac{3c}{\sqrt{2}}\int\limits_0^y \sin\left[\sqrt{2}c(y-t)\right]f(t)dt,\quad B_1(y)=\varphi_0(y),$$

$$f(y)=\alpha r\left[\bar{\tau}c^2\operatorname{ch}(cy)+\bar{\nu}c\operatorname{sh}(cy)\right]-\frac{2}{r}[\varphi_r(y)+2\varphi_0(y)]-\frac{6c}{r}\int\limits_0^y \operatorname{sh}[c(y-t)]\varphi_0(t)dt.$$

**Замечание.** Решение $u(x,y)$ задачи S по переменной $y$ будет принадлежать тому же классу, что и функции $\varphi_0(y),\varphi_r(y)$.

Автор выражает благодарность А.М. Нахушеву, который обратил внимание на важность исследования уравнений вида (1), (20), (39).

## Библиографический список


1. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, – № 1. – С. 72–81.

2. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, – № 1. – С. 103–108.

3. Ozturk I. Boundary value problem for the loaded differential equation of fractional order // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 1995. – Т. 1, – № 2. – С. 12–17.

4. Токова А.А. О первой краевой задаче для одного нагруженного дифференциального уравнения второго порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2005. – Т. 8, – № 1. С. 87–91.

5. Токова А.А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения со знакопеременной характеристической формой // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2. – С. 40–45.

6. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. – 232 с.

7. Хубиев К.У. Об одной модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка с характеристическим изменением типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2015. – Т. 17, – № 2. –С. 48–51.

8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. – 735 с.

9. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 12.09.2015