Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 22-26. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-22-26

УДК 517.95

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

О.Х. Масаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

В работе найдены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Дирихле для волнового уравнения.

Ключевые слова: задача Дирихле, функция типа Миттаг-Леффлера, волновое уравнение

MSC 35L05

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE UNIQUENESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR NONLOCAL WAVE EQUATION

O.Kh. Masaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

In this paper we find necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for the wave equation.

Key words: Dirichlet problem, the function of Mittag-Leffler, the wave equation

Введение

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \partial_{0y}^{\alpha} u(x,\eta) = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \tag{1}$$

где $\partial_{0y}^{\alpha} u(x,\eta) = D_{0y}^{\alpha-2} u_{\eta\eta} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^y (y-\eta)^{1-\alpha} u_{\eta\eta}(x,\eta) d\eta$ – регуляризованная частная дробная производная порядка α по переменной y [1, с. 11].

В работе [2] была доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

в прямоугольной области Ω с иррациональным отношением сторон:

$$\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q},$$

в классе функций, которые непрерывно дифференцируемы и имеют в Ω интегрируемые по Лебегу вторые производные.

Исследованию задачи Коши для уравнения (1) посвящены работы [3], [4, с. 374]. Решение первой краевой задачи для уравнения (1) можно найти в работе [5].

В работе [6] было доказано, что задача Дирихле для уравнения (1) в области Ω имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\sin_{\alpha}(\lambda_n^{1/\alpha} b) \neq 0,$$

где $\sin_{\alpha}(z)$ - обобщенный тригонометрический синус [1, с. 238]:

$$\sin_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)}.$$

В данной работе найдено необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) в прямоугольной области Ω, которое согласуется с условием единственности решения задачи Дирихле для волнового уравнения.

Рассмотрим функцию типа Миттаг-Леффлера [7, с. 117]:

$$E_{1/\alpha}(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)}, \ \alpha > 0. \tag{2}$$

Известно, что при $0 < \alpha < 2$ функция типа Миттаг-Леффлера (2) имеет лишь конечное число вещественных нулей [7, с. 142]; при $\alpha \leq \frac{4}{3}$, $\mu = 2$ у этой функции нет нулей [1, с. 129], [8]; при $\alpha \in \left[\frac{5}{3}, 2\right)$, $\mu = 2$ функция (2) имеет не менее двух нулей [9].

Обозначим через $\mathbb{Q}^{\alpha}$ подмножество действительных чисел вида

$$\frac{\lambda^{1/\alpha}}{(\pi n)^{2/\alpha}},$$

где $n \in \mathbb{N}$, λ - все вещественные корни функции $E_{1/\alpha}(z;2)$. Очевидно, что множество $\mathbb{Q}^\alpha$ ограничено, точка 0 является точкой сгущения.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega})$, имеющую производные $u_{xx}, \partial_{0y}^\alpha u \in C(\Omega)$, и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области Ω.

Постановка задачи

Задача. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y) = u(a,y) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0. \tag{4}$$

Теорема. *Для того, чтобы задача (1), (3),(4) имела только тривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{b}{a^{\frac{\alpha}{2}}} \notin \mathbb{Q}^\alpha.$$

Доказательство. 1. Достаточность. Обозначим

$$v(x,y) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \cdot (b-y)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\big(-\lambda_n(b-y)^\alpha;\alpha\big), \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \ n = 1,2,...$$

Используя формулу дробного интегрирования по частям

$$\int\limits_c^d f(t)D_{ct}^\gamma g(\eta)dt = \int\limits_c^d D_{dt}^\gamma f(\eta)g(t)dt, \ \gamma \le 0,$$

для оператора L получим следующую формулу Грина

$$\int\limits_\Omega (vLu - uL^*v)dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} (vu_x - uv_x)dy + (u_yD_{by}^{\alpha-2}v + uD_{by}^{\alpha-1}v)dx, \tag{5}$$

где

$$L^*v \equiv v_{xx} - D_{by}^\alpha v,$$

D_{by}^α– оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке b [1, с. 9].

Замечая, что

$$L^*v = 0,$$

$$v(0,y) = v(r,y) = 0, \ \lim_{y\to b} D_{by}^{\alpha-2}v(x,\eta) = 0,$$

из (5) при однородных краевых условиях приходим к формуле

$$\lambda_n^{-1/\alpha}\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}b)\int\limits_0^a u_y(x,0)\sin\sqrt{\lambda_n}xdx = 0, \ n = 1,2,...$$

Условие теоремы позволяет записать

$$\int_0^r u_y(x,0)\sin\sqrt{\lambda_n}x dx = 0,\ n = 1,2,...$$

Известно, что система функций $\{\sin\sqrt{\lambda_n}x\}$ полна в пространстве $L^2(0,r)$. Поэтому из леммы Лагранжа получаем, что

$$u_y(x,0) = 0,\ x \in (0,r). \tag{6}$$

Следовательно,

$$\partial_{0y}^{\alpha}u(x,\eta) = D_{0y}^{\alpha}u(x,\eta) - \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}u_y(x,0) - \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(x,0) = D_{0y}^{\alpha}u(x,\eta).$$

В силу равенства (6) имеет место формула

$$D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta) = D_{0y}^{\alpha-2}u_\eta(x,\eta).$$

Следовательно,

$$Lu \equiv u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,\eta) = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta) = 0,\\ &\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-2}u(x,\eta) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, задачу (1), (3), (4) можно свести к задаче (7), (3), (8). Известно (см. [10, с. 123]), что эта задача имеет только нулевое решение. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ в области Ω.

2. Необходимость. Допустим, что $\frac{b}{a^{\frac{\alpha}{2}}} \in Q^{\alpha}$, т. е. при фиксированных n и λ

$$\frac{b}{a^{\alpha/2}} = \frac{\lambda^{1/\alpha}}{(\pi n)^{2/\alpha}}.$$

Тогда нетрудно показать, что функция

$$u(x,y) = yE_{1/\alpha}\left[-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 y^{\alpha};2\right]\sin\frac{\pi n}{a}x,$$

удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (4). □

Библиографический список

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. Bourgin D. G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 45, 851-858, 1939.
3. Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка// Изв. РАН. 2009. Т. 73, № 2. С. 141-182.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

5. Псху А.В. Первая краевая задача для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка// Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию / Владикавказ: ВНЦ РАН. 2008. С. 235-242.

6. Масаева О.Х. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, №12. С. 1554-1559.

7. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

8. Псху А.В. О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 4. С. 592-599.

9. Попов А.Ю. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 6. С. 137-155.

10. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.07.2015