Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 7-12. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-7-12

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЫМ СДВИГОМ

А.Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

В работе исследуется характеристические задачи для нагруженного волнового уравнения с особым сдвигом. Доказана теорема о единственности решения задачи Гурса и найдены необходимые условия ее разрешимости.

Ключевые слова: задача и условие Гурса, волновое уравнение, нагруженные уравнения характеристики

MATHEMATICS

MSC 35L05

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR THE LOADED WAVE EQUATION WITH SPECIFIC CHANGES

A.H. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

In this paper the characteristic problem for the wave equation loaded with a special shift. A theorem on the uniqueness of the solution of the Goursat problem and find necessary conditions for its solvability.

Key words: Goursat problem, Goursat condition, wave equation, loaded equation, characteristics

Введение

На актуальность исследований нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными [1], когда они содержат след искомого решения на многообразии вида $(\xi,0)$, где ξ – характеристическая координата , впервые обратил внимание в работе [2] А.М. Нахушев. В указанной работе автором был приведен пример вырождающегося гиперболического уравнения вида $u_{yy}-y^2u_{xx}+u_x+\lambda u(\xi,0)=0$, для коротогоустраняется эффект неравноправия характеристик второй задачи Дарбу, имеющийся для этого уравнения при $\lambda=0$. Исследованию краевых задач для линейных нагруженных (в том смысле, о котором говорится выше) строго и слабо гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, когда носителями входных данных являются характеристики и область содержит интервал линии параболического вырождения посвящены работы [3]-[7].

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{yy}-u_{xx}+\lambda\operatorname{sign}y\cdot u(x-|y|,0)=0 \tag{1}$$

в области $\Omega=\{(x,y):|y|<x<1-|y|\}$.

Начнем с задачи Гурса для уравнения (1). Условия Гурса имеют вид

$$u\left(\frac{x}{2},\operatorname{sign}y\frac{x}{2}\right)=\varphi^{\pm}(x),\quad 0\le x\le 1. \tag{2}$$

Уравнение (1) в области $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$ эквивалентно уравнению

$$u_{yy}-u_{xx}=\lambda u(x+y,0), \tag{3}$$

и оно в характеристических координатах

$$\xi=x+y,\eta=x-y \tag{4}$$

имеет вид

$$v_{\xi\eta}=-\frac{\lambda}{4}v(\xi,\xi), \tag{5}$$

где

$$v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right). \tag{6}$$

Область $\triangle=\{(\xi,\eta),0<\xi<\eta<1\}$ есть образ Ω^- при отображении (4). Согласно (6) условие (2) переходит в условие

$$v(0,\eta)=\varphi^{-}(\eta),\quad 0\le\eta\le 1. \tag{7}$$

Непосредственным вычислением легко показать, что функция

$$v(\xi,\eta)=\frac{\lambda}{4}\int\limits_{\xi}^{\eta}v(t,t)(\eta-t)dt$$

является решением уравнения (5), удовлетворяющим однородным условиям Коши

$$v(\xi,\xi)=0, \quad (v_\xi - v_\eta)\big|_{\eta=\xi}=0.$$

Этот факт дает нам право ввести следующее определение.

Функцию $u(x,y)$ назовем обобщенным решением уравнения (3) в области Ω^-, если она представима формулой

$$u(x,y)=\frac{\tau(\xi)+\tau(\eta)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\eta}\nu(t)dt+\frac{\lambda}{4}\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-t)\tau(t)dt, \tag{8}$$

где $\tau(x)\in C(\bar{J})\cap C^1(J)$, $\nu(x)$ – непрерывная и интегрируемая на единичном интервале J функция.

Так как $u_y=u_\xi-u_\eta$, то из (8) нетрудно усмотреть, что

$$u(x,0)=\tau(x), \quad \lim_{t\to 0^-}u_y=\nu(x). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) в области $\Omega^+=\Omega\backslash(y>0)$. В этой области оно имеет вид

$$u_{yy}-u_{xx}+\lambda u(x-y,0)=0. \tag{10}$$

В (10) перейдем к характеристическим координатам

$$\xi=x-y, \quad \eta=x+y. \tag{11}$$

Тогда оно примет вид

$$v_{\xi\eta}=\frac{\lambda}{4}v(\xi,\xi),$$

а область отобразится в $\triangle$. Ясно, что на этот раз

$$u_y=u_\eta-u_\xi, \quad v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2}\right).$$

В соответствии с этим обобщенным решением уравнения (10) в области Ω^+ назовем любую функцию вида

$$u(x,y)=\frac{\tau(\xi)+\tau(\eta)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\eta}\nu(t)dt-\frac{\lambda}{4}\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-t)\tau(t)dt, \tag{12}$$

Равенства (4) и (11) допускают единую запись

$$\xi=x-|y|, \quad \eta=x+|y|. \tag{13}$$

С учетом этого введем следующее определение.

Обобщенным решением уравнения (1) в области Ω назовем любую функцию $u(x,y)$, представимую в виде

$$u(x,y)=\frac{\tau(x-|y|)+\tau(x+|y|)}{2}+\frac{\operatorname{sign}y}{2}\int\limits_{x-|y|}^{x+|y|}\nu(t)dt-$$

$$-\frac{\lambda \operatorname{sign} y}{4}\int\limits_{x-|y|}^{x+|y|}(x+|y|-t)\tau(t)dt, \qquad (14)$$

где $\tau(x)\in C^1(J)\cap C(\bar{J})$, а $\nu(x)$ – непрерывна и интегрируема в J.

Удовлетворяя (14) условию (2), учитывая, что $\tau(0)=\varphi^{\pm}(0)$, и предполагая, что $\varphi^{\pm}(x)\in C^1(\bar{J})$, имеем

$$\tau(x)=\varphi^{+}(x)+\varphi^{-}(x)-\varphi^{+}(0),$$

$$\nu(x)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^x\tau(t)dt+[\varphi^{+}(x)-\varphi^{-}(x)]'.$$

Таким образом, доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $\varphi^{\pm}(x)\in C^1(\bar{J})$, то задача Гурса (2) для уравнения (1) в области Ω имеет единственное обобщенное решение $u(x,y)$ и оно обладает тем свойством, что*

$$u_y(x,0)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^x\tau(t)dt+[\varphi^{+}(x)-\varphi^{-}(x)]',$$

$$u(x,0)=\varphi^{+}(x)+\varphi^{-}(x)-\varphi^{+}(0).$$

Теперь рассмотрим для уравнения (1) задачу с данными на не пересекающихся характеристиках

$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\varphi_0(x), \quad 0\le x\le 1, \qquad (15)$$

$$u\left(\frac{1+x}{2},\frac{1-x}{2}\right)=\varphi_1(x), \quad 0\le x\le 1. \qquad (16)$$

Удовлетворим (14) условиям (15), (16). Тогда будем иметь

$$\varphi_0(x)=\frac{\tau(0)+\tau(x)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\nu(t)dt+\frac{\lambda}{4}\int\limits_0^x(x-t)\tau(t)dt, \qquad (17)$$

$$\varphi_1(x)=\frac{\tau(1)+\tau(x)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_x^1\nu(t)dt-\frac{\lambda}{4}\int\limits_x^1(1-t)\tau(t)dt. \qquad (18)$$

Из (17), (18) видно, что

$$2\varphi_0'(x)=\tau'(x)-\nu(x)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^x\tau(t)dt, \qquad (19)$$

$$2\varphi_1'(x)=\tau'(x)-\nu(x)+\frac{\lambda}{2}(1-x)\tau(x). \qquad (20)$$

Значит,

$$4[\varphi_1'(x)-\varphi_0'(x)]=\lambda[(1-x)\tau(x)-\int\limits_0^x\tau(t)dt].$$

Отсюда при $\lambda \neq 0$

$$(1-x)\tau(x) - \int_0^x \tau(t)dt = \frac{4}{\lambda}[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]'. \tag{21}$$

Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x) \in C^2(J)$, то

$$(1-x)\tau'(x) - 2\tau(x) = \frac{4}{\lambda}[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]'',$$

или

$$[(1-x)^2\tau(x)]' = \frac{4}{\lambda}(1-x)[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]''.$$

Следовательно

$$\int_1^x [(1-t)^2\tau(t)]'dt = \frac{4}{\lambda}\int_1^x (1-t)[\varphi_1(t) - \varphi_0(t)]''dt.$$

Поэтому

$$\tau(x) = \frac{-4/\lambda}{(1-x)^2}\int_x^1 (1-t)d[\varphi_1'(t) - \varphi_0'(t)] =$$

$$= \frac{4/\lambda}{(1-x)^2}(1-x)[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]' - \frac{4/\lambda}{(1-x)^2}\int_x^1 d[\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] =$$

$$= \frac{4[\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)]}{\lambda(1-x)} + \frac{4[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]}{\lambda(1-x)^2} - \frac{4[\varphi_1(1) - \varphi_0(1)]}{\lambda(1-x)^2}.$$

Итак,

$$\tau(x) = \frac{(1-x)[\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)] + \varphi_1(x) - \varphi_1(1) + \varphi_0(1) - \varphi_0(x)}{\lambda(1-x)^2/4}. \tag{22}$$

По условию (см. (16)) $\tau(1) = \varphi_1(1)$. С учетом этого и (22) заключаем, что условие

$$\frac{\lambda}{4}\varphi_1(1) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)[\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)] + \varphi_1(x) - \varphi_1(1) + \varphi_0(1) - \varphi_0(x)}{(1-x)^2}$$

является необходимым условие разрешимости задачи.

Пользуясь правилом Лопиталя, последнее условие можно переписать в виде

$$\lambda\varphi_1(1) = 2[\varphi_0''(1) - \varphi_1''(1)]. \tag{23}$$

Условие (23) – необходимое условие непрерывности $\tau(x)$ в точке $x = 1$.

В соответствии с (15) $\tau(0) = \varphi_0(0)$. Поэтому из (22) при $x = 0$ имеем

$$\varphi_0(x) = \frac{4}{\lambda}[\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0) + \varphi_1(0) - \varphi_1(1) + \varphi_0(1) - \varphi_0(0)]. \tag{24}$$

Из (21) при $x \to 0$ находим

$$\varphi_0(0) = \frac{4}{\lambda}[\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0)]. \tag{25}$$

Равенства (24) и (25) позволяют написать

$$\varphi_1(0) - \varphi_1(1) = \varphi_0(0) - \varphi_0(1). \tag{26}$$

Условия (25) и (26) являются необходимыми условиями разрешимости задачи (15), (16) для уравнения (1).

Заключение

Итак, можно считать, что доказана следующая

Теорема 2. *Если* $\varphi_0(x)$ *и* $\varphi_1(x)$ *принадлежат классу* $C^1(\bar{J}) \cap C^3]0,1]$ *и*

$$\lambda\varphi_1(1) = 2[\varphi_0''(1) - \varphi_1''(1)], \lambda\varphi_0(0) = 4[\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0)],$$

$$\varphi_1(0) - \varphi_1(1) = \varphi_0(0) - \varphi_0(1),$$

то задача (15), (16) для уравнения (1) в области Ω *имеет и притом единственное обобщенное решение.*

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
2. Нахушев А.М.О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. №1. с. 103-108.
3. Аттаев А.Х. Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10. № 2. С. 14-17.
4. Аттаев А.Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения с волновым оператором в главной части // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тезисы докладов АМАДЕ, 2009 г., Минск, Беларусь.
5. Аттаев А.Х. О задаче с данными на непересекающихся характеристиках // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». г. Белгород, 17 - 21 октября 2011 г. С.19.
6. Аттаев А.Х. Задача Гурса для гиперболического уравнения с характеристической нагрузкой // Материалы IV Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик-Терскол, 2013.
7. Аттаев А.Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т.16. № 3. с. 9-12.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.07.2015