Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 1(10). С. 18-24. ISSN 2079-6641

УДК 517.925.42

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДУФФИНГА С ФРАКТАЛЬНЫМ ТРЕНИЕМ

Р.И. Паровик[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе рассматривается нелинейная фрактальная колебательная система Дуффинга с трением. Проведен численный анализ этой системы с помощью конечно-разностной схемы. Построены решения системы в зависимости от дробных параметров, а также фазовые портреты.

Ключевые слова: оператор Герасимова-Капуто, фазовый портрет, осциллятор Дуффинга, конечно-разностная схема

© Паровик Р.И., 2015

MSC 37C70

MATHEMATICAL MODELING OF NONLOCAL OSCILLATORY DUFFING SYSTEM WITH FRACTAL FRICTION

R.I. Parovik[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

The paper considers a nonlinear fractal oscillatory Duffing system with friction. The numerical analysis of this system by a finite-difference scheme was carried out. Phase portraits and system solutions were constructed depending on fractional parameters.

Key words: Gerasimov-Caputo operator, phase portrait, Duffing oscillator, finite-difference scheme

© Parovik R.I., 2015

Введение

Исследование нелинейных колебательных систем имеет важное практическое значение [1]. С развитием теории моделирования фрактальных процессов появилась возможность выявить новые свойства нелинейных фрактальных колебательных систем. Такие колебательные процессы описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков [2]. Дробные порядки производных связаны с фрактальной размерностью среды, а их учет в колебательной системе, как дополнительных степеней свободы, дает предпосылки к новым хаотическим режимам, которые описывают реальные процессы и явления. Например, в работе [3] был исследован вопрос о моделировании затухающих колебаний в шине транспортного средства, в работе [4], были изучены свойства вязко-упругих свойств балок, пластин и цилиндрических оболочек.

Интерес представляет изучение нелинейной колебательной системы с трением (осциллятор Дуффинга). В работах [5, 6] рассмотрено моделирование осциллятора Дуффинга с фрактальным трением. В настоящей работе рассмотрено обобщение предложенных ранее моделей осциллятора Дуффинга, в случае, когда в исходное уравнение вводится оператор дробного дифференцирование вместо производной второго порядка по смещению. Исследованы режимы колебательной системы в результате изменения дробных параметров, построены фазовые портреты.

Постановка задачи

Найти решение $x(t)$, где $t \in [0,T]$, удовлетворяющее уравнению

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\eta) + a\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t) \tag{1}$$

и начальным условиям

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0 \tag{2}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\ddot{x}(\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\alpha-1}}$, $\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\beta}}$ – операторы дробного дифференцирования в смысле Герасимова-Капуто порядка α и β; $\dot{x}(t) = dx/dt$ и $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$; x_0, y_0, δ, ω, a, T – заданные параметры.

Необходимо отметить, что в работах [2, 5, 6] для описания трения использовался оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Мы используем оператор Герасимова-Капуто, в этом случае справедливы локальные условия (2). В случае оператора Римана-Лиувилля необходимо задавать нелокальные условия [7].

Метод решения

Задачу (1), (2) решим с помощью численных методов – явной конечно-разностной схемы. Введем τ – шаг дискретизации, причем $t_j = j\tau$, $j = 1,2,..,N$, $N\tau = T$, $x(j\tau) = x_k$. Тогда производные дробных порядков, входящие в уравнении (1, можно аппроксимировать следующим образом [8]

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\eta) \approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \left[(k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}\right] \left(x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}\right) \tag{3}$$

$$\partial_{0t}^{\beta}x(\eta)\approx\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{k=0}^{j-1}\left[(k+1)^{1-\beta}-k^{1-\beta}\right]\left(x_{j-k+1}-x_{j-k}\right).$$

Подставляя соотношения (3) в уравнение (1), получим следующую явную конечно-разностную схему:

$$x_1=Ax_0-Cx_0^3+K,\ x_2=Ax_1-Bx_0-Cx_1^3+K\cos(\omega\tau),$$

$$x_{j+1}=Ax_j-Bx_{j-1}-Cx_i^3-B\sum_{k=1}^{j-1}b_k\left(x_{j-k+1}-2x_{j-k}+x_{j-k-1}\right)-$$

$$-M\sum_{k=1}^{j-1}c_k\left(x_{j-k+1}-x_{j-k}\right)+K\cos(\omega j\tau) \quad (4)$$

$$A=\left(\frac{2\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}+1\right)\Bigg/\left(\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\right),$$

$$B=\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\Bigg/\left(\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\right),\ K=\delta\Bigg/\left(\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\right),$$

$$C=1\Bigg/\left(\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\right),M=\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\Bigg/\left(\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\right),$$

$$b_k=(k+1)^{2-\alpha}-k^{2-\alpha},c_k=(k+1)^{1-\beta}-k^{1-\beta},j=2,..,N-1.$$

Производную $y(t)=\dot{x}(t)=dx/dt$ аппроксимируем конечной разностью:$y_j=\dfrac{x_j-x_{j-1}}{\tau}$. Значения x_0 и y_0 определяются из начальных условий (2).

Результаты моделирования

Численное моделирование проводилось с учетом следующих значений параметров в решении (4): $N=4000$, $\tau=\pi/100$, $\omega=1,\delta=0.3,a=0.15,x_0=0.2,y_0=0.3$. Фазовый портрет строился по точкам$(x(t),y(t))$ в зависимости от параметров α и β.

Для исследования колебательных режимов часто используют сечение Пуанкаре. Сечение Пуанкаре – это плоскость в фазовом пространстве, выбранная таким образом, чтобы все траектории, принадлежащие аттрактору, пересекали ее под ненулевым углом.

Отметим, что замкнутые фазовые траектории образуют конечные последовательности точек в сечении Пуанкаре (одна точка соотвествует предельному циклу с периодом T, две точки соответсвуют предельному циклу с удвоенным периодом $2T$, непериодические режимы соотвествуют бесконечные последовательности точек в сечении Пуанкаре. В качестве сечение Пуанкаре выберем плоскость постоянной фазы внешнего воздействия $\omega t_n=2\pi n$, что соотвествует выбору точек фазовой траектории ровно через период $T=2\pi$ внешней силы.

На рис. 1 представлен случай $\alpha=2,\ \beta=1$, соотвествующий классическому осциллятора Дуффинга с трением. В этом случае эффект памяти в колебательной системе исчезает. Решение не является периодическим, а имеет хаотический характер (рис. 1а). Подтверждение хаотического режима для вынужденных колебаний фрактального осциллятора Дуффинга можно увидеть на рис. 1б, где представлено сечение

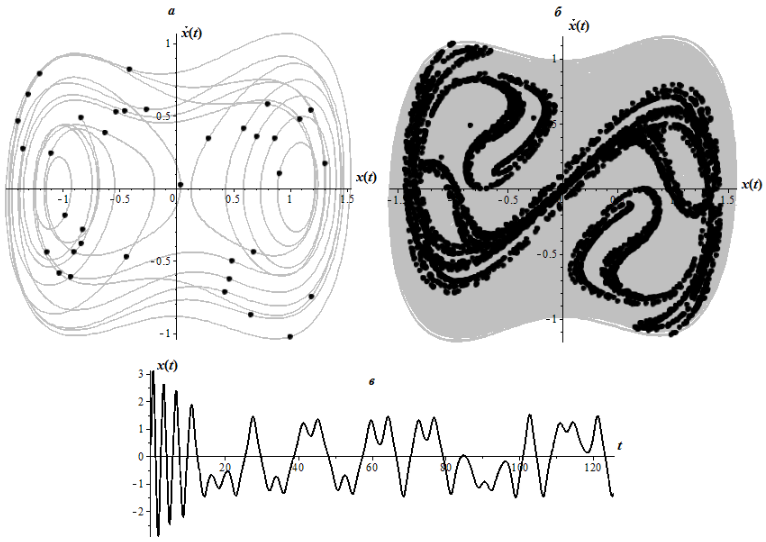

Рис. 1. Фазовый портрет и точки сечения Пуанкаре (а), построенные согласно численному решению (в) с учетом параметров: $N = 30000$, $\tau = \frac{\pi}{100}$, $\omega = 1$, $\delta = 0.3$, $a = 0.15$, $x_0 = -1.3311$, $y_0 = -0,1429$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$; б – сечение Пуанкаре при $N = 5 \cdot 10^5$ с теми же значениями параметров

Пуанкаре, построенное при большом количестве точек $N = 5 \cdot 10^5$, а также функция смещения $x(t)$, которая приведена на рис. 1в. Исходя из точек сечения Пуанкаре рис. 1б, можно заключить, что классический осциллятор Дуффинга является бистабильной колебательной системой [9], которая обладает хаотическим аттрактором, характерным для детерминированного хаоса [10].

На рис. 2 приведен фазовый портрет (рис. 2а) и функция смещения (рис. 2б), полученные с помощью численной схемы (4) в случае: $\alpha = 2$, $\beta = 0.6$.

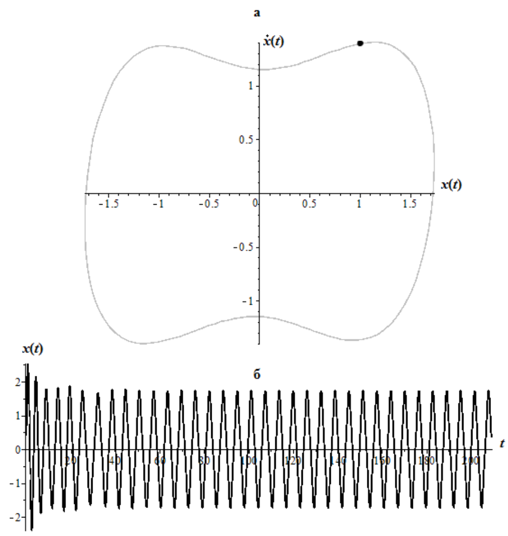

Рис. 2. Фазовый портрет и точка Пуанкаре (а), построенные согласно численному решению (б) с учетом параметров: $N = 4000, \tau = \frac{\pi}{100}, \omega = 1, \delta = 0.3, a = 0.15, x_0 = 1.0052, y_0 = 1.3901, \alpha = 2, \beta = 0.6$

Можно отметить, что решение в этом режиме имеет периодический характер, а фазовая траектория – предельный цикл. Сечение Пуанкаре состоит из одной единственной точки, что отражено на рис. 2б и эта точка совпадает с начальной точкой (x_0, y_0). Аналогичные результаты были представлены в работе [5]. Можно также отметить, что кубическая нелинейность в уравнении (**??**) приводит к увеличению частоты колебаний (рис. 2б).

На рис. 3 представлена расчетная кривая, построенная по формуле (**??**). Параметры расчета: количество точек $N = 1000$, шаг дискретизации $\tau = 0.16$, $\xi = 4, \alpha = 2, \beta = 0.8, (x(0), \dot{x}(0)) = (-2.623, -4.0705)$.

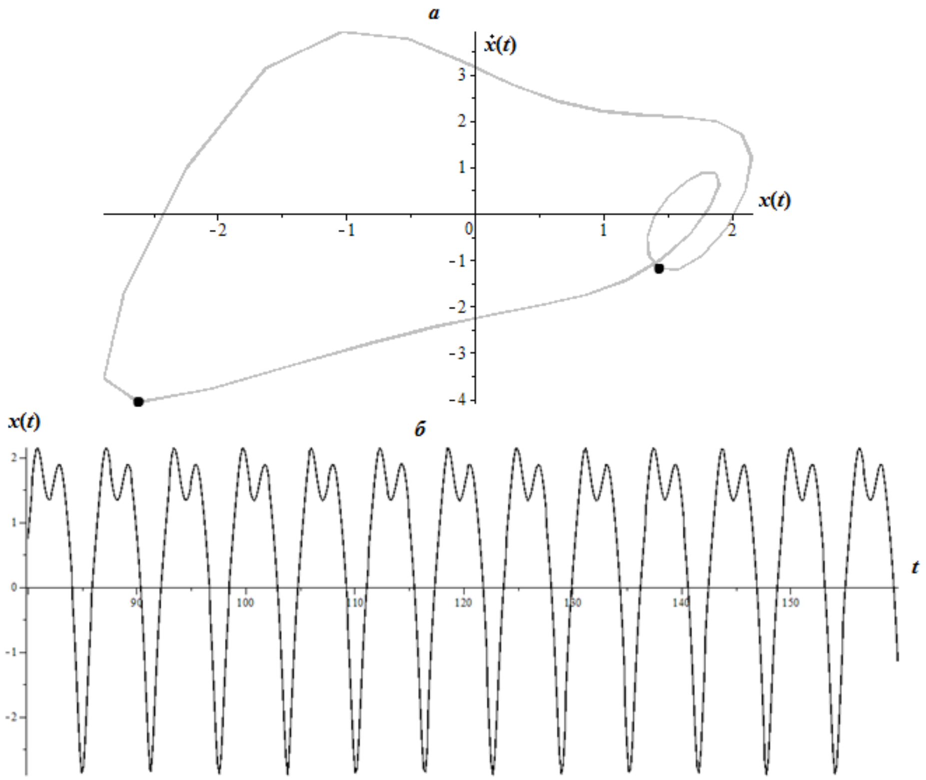

Рис. 3. Предельный цикл с точками сечения Пуанкаре (а) и численное двупериодическое решение (б), полученное по формуле (**??**) с учетом параметров: $\alpha = 2, \beta = 0.8, \tau = 0.16, a = 0.15, \delta = 4, (x(0), \dot{x}(0)) = (-2.623, -4.0705)$

На рис. 3а и рис. 3б видно, что решение имеет придельный цикл с петлей, причем сечение Пуанкаре содержит две точки. Поэтому решение является двупериодическим. Наличие петли приводит к раздвоении амплитуды колебаний (рис. 3а). Подобные структуры получали авторы работы [5].

На рис. 4 представлена эволюция решения и фазовые портреты при различных параметров α, β и τ. На рис. 4 фазовые траектории выходят на предельный цикл. На рис. 4в наблюдается хаотичный режим. Можно сделать вывод, что появление новых параметров (дробных показателей) в эредитарном уравнении (1), расширяет свойства осциллятора Дуффинга и предваряет появления новых режимов и эффектов в нелинейной колебательных системах. Порядки дробных производных выступают в качестве управляющих параметров, которые определяют режимы фрактальной колебательной системы, что необходимо учитывать при их моделировании.

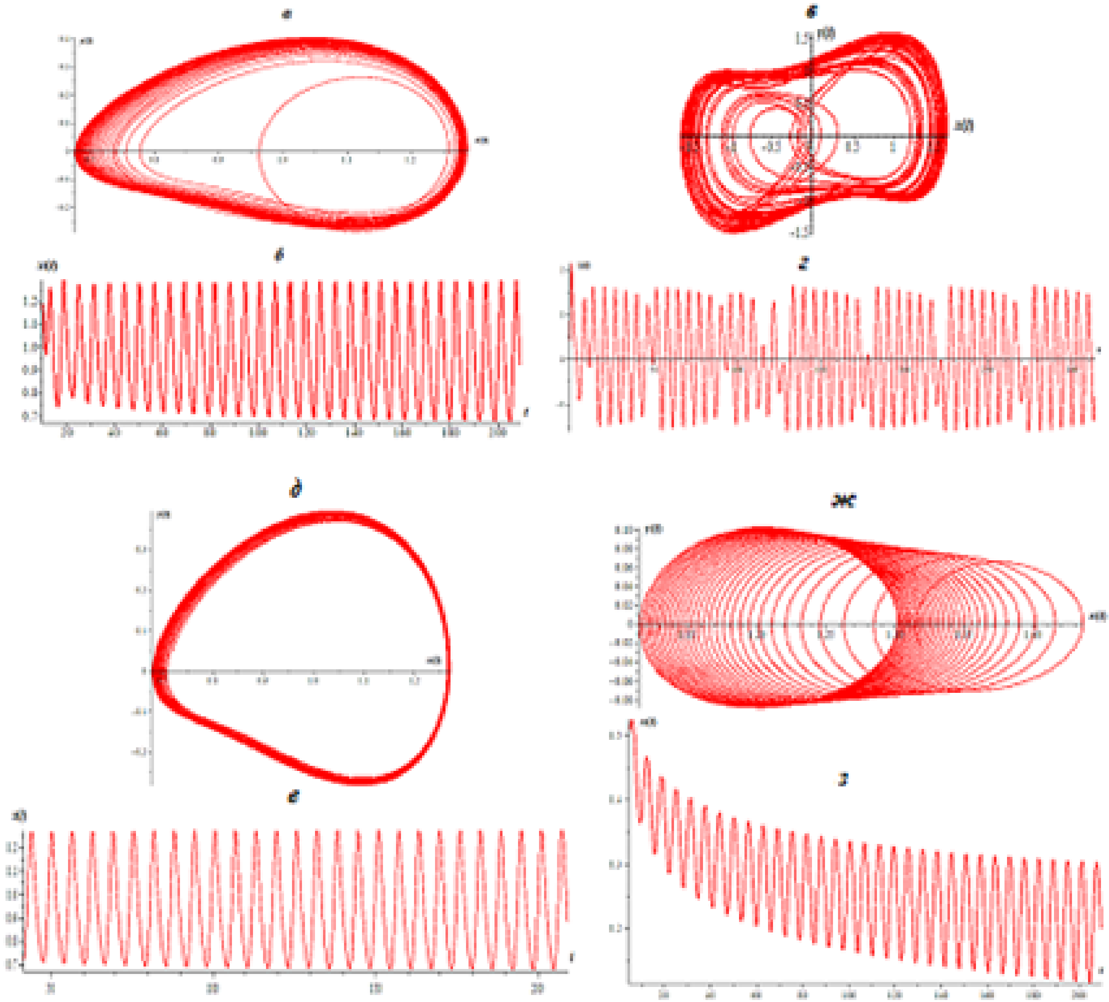

Рис. 4. Фазовый портрет и численное решение (??) с учетом параметров: (а,б) $\alpha = 1.7, \beta = 1, \tau = \frac{\pi}{60}$; (в,г) $\alpha = 1.8, \beta = 1, \frac{\pi}{40}$; (д,е) $\alpha = 1.8, \beta = 0.2, \tau = \frac{\pi}{60}$; (ж,з) $\alpha = 1.3, \beta = 0.2, \tau = \frac{\pi}{60}$

Заключение

В работе рассмотрена модель фрактального осциллятора Дуффинга с трением. Найдены численные решение в зависимости от дробных параметров α и β, построены фазовые траектории. Анализ решений показал, что существуют как периодические решения, так и хаотические режимы. Для более качественного анализа в дальнейшем будут построены бифуркационные диаграммы и проведен тест на установления условий возникновения периодических решений.

Библиографический список

1. Рехвиашвили С.Ш. Размерные явления в физике конденсированного состояния и нанотехнологиях. Нальчик: КБНЦ РАН, 2014. 250 с.

2. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.

3. Kao B.G. A three-dimensional dynamic tire model for vehicle dynamic simulations // Tire Science and Technology. 2000. Vol. 28, no. 2. P. 72–95.

4. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63, no. 1. P. 010801.

5. Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. Vol. 24, no. 1. P. 013107.

6. Sheu L.J., Chen H.K., Chen J.H., Tam L.M. Chaotic dynamics of the fractionally damped Duffing equation // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Vol. 32, no. 4. P. 1459–1468.

7. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

8. Паровик Р.И. Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. Т. 9, № 2. С. 30–35.

9. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. М.: Мир, 1979. 279 с.

10. В.Т. Гринченко А.А. Снарский, В.Т. Мацыпура. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: ЛКИ, 2007. 264 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 13.04.2015