

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958 [550.3 + 551.5]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ ЗАРЯДА ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Т.С. Кумыков¹, Р.И. Паровик^{2, 3}

¹ Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика
Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

² Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

³ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: macist20@mail.ru; romanparovik@gmail.com

В работе предложена новая математическая модель изменения заряда облачных капель в грозовых облаках. Модель учитывает фрактальные свойства грозовых облаков, а ее решение было получено с помощью аппарата дробного исчисления.

Ключевые слова: фрактальная размерность, математическая модель, оператор Римана-Лиувилля, оператор Капуто

© Кумыков Т.С., Паровик Р.И., 2015

MATHEMATICAL MODELING

MSC 37C70

MATHEMATICAL MODELING OF CHANGES IN THE CHARGE CLOUD DROPLETS IN A FRACTAL ENVIRONMENT

T.S. Kumykov¹, R.I. Parovik^{2, 3}

¹ Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st.,
89a, Russian

² Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch,
Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7,
Russia

³ Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: macist20@mail.ru; romanparovik@gmail.com

The paper proposed a new mathematical model of the variation of the charge cloud drops in storm clouds. The model takes into account the fractal properties of storm clouds, and the solution was obtained using the apparatus of fractional calculus.

Key words: fractal dimension, the mathematical model, operator Riemann-Liouville, operator Caputo

© Kumykov T.S., Parovik R.I., 2015

Введение

В течение последнего десятилетия многими геофизиками интенсивно изучается фрактальность природных структур и его влияние на различные геофизические процессы. К таким природным явлениям относится, и облако в котором вопрос образования и разделения электрических зарядов является актуальной. Изучению закономерностей разделения электрических зарядов в облаках посвящены многочисленные исследования, основные результаты которых обобщены в классических работах [1]–[9], где предложено большое количество объяснений без учета фрактальности среды. Результаты исследований в этой области показывают, что одной из важных предпосылок разделения электрических зарядов в облаках, является наличие ледяной фазы (кристалликов льда, крупы и градин) и переохлажденных водяных капель [10].

Известно, что облака с мощными конвективными токами имеют фрактальную структуру и облако является фрактальной средой [11]. Поэтому можно утверждать, что процессы, протекающие в такой среде хорошо описываются с помощью аппарата дробного исчисления.

Постановка и решение задачи

Согласно классическим представлениям, например, в работе [12], следуя теории Френкеля [13], для облачных капель, находящихся в слабо ионизированной воздушной среде, был получен средний заряд q_r , который создается одной облачной каплей радиуса r , в виде

$$q_r = 4\pi\epsilon_0 n \zeta a, \quad (1)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; a – радиус пузырька; ζ – электрокинетический потенциал; n – количество пузырьков радиуса a , образующихся в облачной капле радиуса r . Поэтому опираясь на теорию Френкеля, полный заряд капли можем записать в следующей форме:

$$q(x, t) = 4\pi\epsilon_0 \zeta R(x, t), \quad (2)$$

где $R(x, t)$ – радиус капли. Закон изменения заряда капли, с учетом уравнения (2) можем записать в виде:

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = 4\pi\epsilon_0 \zeta \frac{\partial R(x, t)}{\partial t}. \quad (3)$$

В уравнении (3) величина $j(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}$ представляет собой плотность потока заряда, который зависит от скорости изменения радиуса капли $\frac{\partial R(x, t)}{\partial t}$ и совпадает с диффузионным потоком у поверхности капли, при условии ее роста за счет диффузии из окружающей среды [14].

В случае, когда процесс протекает во фрактальной среде, то вместо модели (3) необходимо рассмотреть обобщенную модель изменения заряда капли, который учитывает фрактальные свойства среды. Изменение заряда капли зависит от изменения ее размера (3). Поэтому рассмотрим сначала как изменяется размер капли в среде с фрактальной структурой.

Согласно работе [15], диффузионный поток можно определить следующим образом:

$$q(x, t) = -kD_{ax}^\alpha u(x, t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

где k – коэффициент диффузии вещества; $u(x, t)$ – концентрация вещества; D_{ax}^α – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка α с началом в точке a , который определяется следующим образом [16]:

$$D_{ax}^\alpha u(\xi, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{u(\xi, t) d\xi}{(x-\xi)^\alpha}.$$

В случае, когда $\alpha = 1$ оператор Римана-Лиувилля переходит в классическую производную первого порядка.

Отметим, что замена оператора $\partial/\partial t$ на дробный оператор D_{at}^α в дифференциальных уравнениях неявно включает дополнительные факторы взаимодействия физической системы. Дробный параметр α зависит от фрактальной размерности среды, поэтому можно считать, что уравнение (4) описывает фрактальный процесс [15]. Пусть $a = 0$, тогда из формул (3) и (4) получим:

$$j(x, t) = -\frac{k}{4\pi\epsilon_0\zeta} D_{0t}^\alpha R(x, t). \quad (5)$$

Обозначим через $\lambda = -\frac{k}{4\pi\epsilon_0\zeta}$ и подставим в формулу (5) соотношение для плотности потока $j(x, t)$ с учетом (3) приходим к уравнению:

$$\frac{\partial R(x, t)}{\partial t} - \lambda D_{0t}^\alpha R(x, t) = 0. \quad (6)$$

Формула (6) представляет собой уравнение с дробной производной порядка α для которого справедливы следующие нелокальные условия [11]:

$$R(x, 0) = r_1(x), x \in [0, L], \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} R(x, t) = r_2(t), t \in [0, T], \quad (8)$$

Решение задачи (6)-(8) имеет вид [17]:

$$R(x, t) = \int_0^x \frac{r_1(s)}{x-s} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda t}{(x-s)^\alpha} \right) ds + \lambda \int_0^t \frac{r_2(\eta)}{x} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda(t-\eta)}{x^\alpha} \right) d\eta. \quad (9)$$

где $e_{\alpha,\beta}^{\nu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \nu) \Gamma(\delta - \beta n)}$ – функция типа Райта.

Подставляя (9) в формулу (2), получаем соотношение для заряда капли с учетом фрактальной геометрии среды.

$$q(x, t) = 4\pi\epsilon_0\zeta \left[\int_0^x \frac{r_1(s)}{x-s} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda t}{(x-s)^\alpha} \right) ds + \lambda \int_0^t \frac{r_2(\eta)}{x} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda(t-\eta)}{x^\alpha} \right) d\eta \right]. \quad (10)$$

С учетом (10) поток заряженных капель примет вид:

$$j(x, t) = 4\pi\epsilon_0\zeta \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^x \frac{r_1(s)}{x-s} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda t}{(x-s)^\alpha} \right) ds + \lambda \int_0^t \frac{r_2(\eta)}{x} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda(t-\eta)}{x^\alpha} \right) d\eta \right]. \quad (11)$$

Упростим формулу (11), принимая во внимание следующую известную формулу дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования:

$$I'(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + f(x_2(t), t) x_2'(t) - f(x_1(t), t) x_1'(t),$$

получим

$$\begin{aligned} j(x, t) &= 4\pi\epsilon_0\zeta \left[\int_0^x \frac{r_1(s)}{x-s} \frac{\partial}{\partial t} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda t}{(x-s)^\alpha} \right) ds + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{r_2(\eta)}{x} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda(t-\eta)}{x^\alpha} \right) d\eta \right] = \\ &= 4\pi\epsilon_0\zeta \int_0^x \frac{r_1(s)}{x-s} \frac{\partial}{\partial t} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda t}{(x-s)^\alpha} \right) ds + \lambda \frac{r_2(t)}{x} e_{1,\alpha}^{1,0}(0) + \\ &\quad + \lambda \int_0^t \frac{r_2(\eta)}{x} \frac{\partial}{\partial t} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(\frac{-\lambda(t-\eta)}{x^\alpha} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом того, что выполняются свойства [17]:

$$e_{1,\alpha}^{1,0}(0) = 1, \quad D_{0t}^\nu z^{\delta-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(\lambda z^\alpha) = z^{\delta-\nu-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu-\nu,\delta}(\lambda z^\alpha)$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned} j(x, t) &= 4\pi\epsilon_0\zeta \left(\frac{\lambda r_2(t)}{x} + \int_0^x \frac{r_1(s)}{(x-s)t} e_{1,\alpha}^{0,0} \left(\frac{-\lambda t}{(x-s)^\alpha} \right) ds \right) + \\ &\quad + 4\pi\epsilon_0\zeta \lambda \int_0^t \frac{r_2(\eta)}{xt} e_{1,\alpha}^{0,0} \left(\frac{-\lambda(t-\eta)}{x^\alpha} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) представляет собой закон изменения заряда облачных капель с учетом фрактальных свойств среды записанный с помощью функции типа Райта.

В работе [11], было получено уравнение типа (4) с оператором дробного производного по Капуто:

$$q(x, t) = \gamma \partial_{0t}^\alpha u(x, \tau), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (14)$$

где $\gamma > 0$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, \tau) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{du(x, \tau)}{d\tau}$ – регуляризованная дробная производная порядка α от функции $u(x, \tau)$ с началом в точке 0 и τ . С учетом формулы (14) и закона изменения размера капли, считая функцию R зависящей только от времени аналогично формуле (3) перепишем в виде:

$$\partial_{0t}^\alpha R(t) - kR(t) = 0, \quad (15)$$

где $k = \frac{1}{\gamma}$. Уравнение (15) – обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка. Для уравнения (15) справедливо начальное условие вида:

$$R(x, 0) = R_0. \quad (16)$$

Следуя работе [17], решение задачи может быть записано в терминах функции типа Миттаг-леффлера следующим образом:

$$R(t) = R_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), \quad (17)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера. Подставляя решение (17) в формулы (2) и (3), получим:

$$q(t) = 4\pi\epsilon_0\zeta R_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), j(t) = 4\pi\epsilon_0\zeta R_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(kt^\alpha). \quad (18)$$

Формула (18) представляют собой закон изменения заряда капли в обобщенной теории Френкеля в облачной среде через функцию Миттаг-Леффлера.

Заключение

Рассматривая облака, которые, как известно, имеют разную структуру, и имеют свою классификацию по происхождению и морфологическим признакам, к которой можно добавить данные об их фрактальной структуре, возможно в дальнейшем – формирование более общей картины состояния физики облаков.

В данной работе предложена математическая модель закона изменения заряда капель во фрактальной облачной среде, обобщающая теорию Френкеля. Получено решение этой модели с учетом функции типа Райта и функции Миттаг-Леффлера.

Библиографический список

1. Качурин Л. Г., Морачевский В.Г. Кинетика фазовых переходов воды в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1965. 114 с.
2. Мейсон Б. Дж. Физика облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1961. 542 с.
3. Мучник В. М. Физика грозы. Л: Гидрометеоиздат, 1974. 252-257 с.
4. Чалмерс Дж. А. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 420 с.
5. Юман М. Молния. М.: Мир, 1972. 328 с.
6. Ribeira J.C. On the thermo-dielectric effect // Ann. Acad. Brasil. Sci. 1950. vol. 22. №3. P. 547-556.
7. Workman E. J., Reynold S.E. Electrical phenomena occurring during the freezing of delute aqueous solution and their possible relationship to thunderstorm electricity // Phys.Rev. 1956. vol. 94. №4. P. 1073-1075.
8. Workman E. J. The possible role of ammonia in thunderstorm electrification. In: Proc. Intern. Conf. Cloud Phys.. Toronto. 1968. P. 653-656.
9. Имянитов И. М. Электрическая структура конвективных облаков и ее связь с движением воздуха в облаках. Исследование облаков, осадков и грозового электричества // М., Гидрометеоиздат, 1961, с. 225-238.
10. Аджиев А.Х. Куповых Г.В. Атмосферно-электрические явления на Северном Кавказе. Таганрог: 2004. 122 с.
11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003. 272 с.

12. Кумыков Т.С. Жекамухов М.К., Каров Б.Г. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке II. Генерирование грозового электричества за счет выделения заряженных пузырьков при намерзании переохлажденных облачных капель на поверхности градин // Метеорология и гидрология. 2008. №12. С. 15-24.
13. Френкель Я.И. Теория основных явлений атмосферного электричества // Сборник избранных трудов. М.: Наука. 1958. Т.2. С. 538-567.
14. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика: М.: Наука, 1979. 527 с.
15. Шогенов В.Х., Шхануков-Лафишев М.Х., Бештоев Х.М. Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике. Сообщения объединенного института ядерных исследований. Дубна. 1997. 20 с.
16. Самко С.Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Дробные интегралы и производные и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
17. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: КБНЦ РАН, 2005. С. 185.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.05.2015