Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 1(10). C. 5-11. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

УДК 517.953

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А.В. Юлдашева

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок

E-mail: yuasv86@mail.ru

В статье рассматриваются вопросы устойчивости некорректной задачи для уравнения высокого четного порядка. Доказывается однозначная разрешимость при дополнительных условиях и условиях на область.

Ключевые слова: уравнения в частных производных высокого порядка, некорректная задача, метод разделения переменных, цепные дроби.

MATHEMATICS

MSC 35C05

ON THE STABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EVEN ORDER EQUATION

A.V. Yuldasheva

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan, Tashkent c., VUZ gorodok st.

E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper not well posed problem for the even-order equation is studied. The stability of the problem is restored by additional conditions and conditions to domain.

Key words: partial differential equations of higher order, not well posed problem, method of separation of variables, simple continued fractions.

Введение

Рассмотрим следующую задачу для уравнения четного порядка:

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}}=0,\ k,p\in N,\ \ 0<x<\pi,\ \ 0<t<\alpha\pi,$$

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(0,t)=\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(\pi,t)=0,\quad m=0,1,...,k-1,\quad 0\le t\le\alpha\pi,$$

$$\frac{\partial^{j}u}{\partial t^{j}}(x,0)=\varphi_j(x),\ \ j=0,1,...,p-1,\ 0\le x\le\pi,$$

$$\frac{\partial^{j}u}{\partial t^{j}}(x,\alpha\pi)=\psi_j(x),\ \ j=0,1,...,p-1,\ 0\le x\le\pi,$$

здесь α - положительная постоянная.

Если $k=p=1$ мы получим задачу Дирихле для уравнения колебания струны, которая является классической некорректной задачей. Ее решение может не существовать, быть неединственным или непрерывно не зависеть от данных [1]-[3].

В [2], задачи Дирихле для волнового уравнения была исследована с дополнительным предположением об априорной ограниченности градиента решения. Случай когда $p=1,\ k\in N$ был исследован в [4]-[5].

Настоящее исследование приводится к некоторым проблемам теории Диофантовых приближений. Так же отметим, что сформулированная задача некорректна при четных $k-p$.

Основные результаты

Пусть функции $\varphi_j(x),\ \psi_j(x),(j=0,1,...,p-1)$ из $C^{2k}[0,\pi]$ такие, что $\varphi_j^{(2i)}(0)=\varphi_j^{(2i)}(\pi)=\psi_j^{(2i)}(0)=\psi_j^{(2i)}(\pi)=0,\ i=0,1,...,k-1,\ j=0,1,...,p-1$.

Пусть $t,\ E,\ \alpha,\ \delta$ положительные постоянные. Мы рассмотрим решения u из $C_{x,t}^{2k,2p}([0,\pi]\times(0,+\infty])$ следующей задачи:

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}}=0,\ k,p\in N,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(0,t)=\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(\pi,t)=0,\quad m=0,1,...,k-1,\quad t\ge 0, \tag{2}$$

$$\left\|\frac{\partial^{j}u}{\partial t^{j}}(x,0)-\varphi_j(x)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\delta\pi\sqrt{E},\ \ j=0,1,...,p-1, \tag{3}$$

$$\left\|\frac{\partial^{j}u}{\partial t^{j}}\left(x,\tau_j\pi\right)-\psi_j(x)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\delta\pi\sqrt{E},\ \ j=0,1,...,p-1,\ \left|\tau_j-\alpha\right|\le\delta, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^\pi\left(\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right)^2\right)dx\le E,\ \ t\ge 0. \tag{5}$$

для действительных чисел $\tau_j,\ j=0,1,...,p-1$ зависящих от u и удовлетворяющих $\left|\tau_j-\alpha\right|\le\delta$. $\left|\tau_j-\alpha\right|\le\delta$ означает, что конечное время $\alpha\pi$ известно с заданной погрешностью.

Обозначим через Γ_δ множество всех решений задачи (1-(5) из $C_{x,t}^{2k,2p}\left([0,\pi]\times(0,+\infty]\right)$. Заметим, что если $\delta=0$, тогда задача (1-(5) приводится к классической краевой задаче с дополнительным предположением (5).

Пусть $Diam\Gamma_\delta=\sup\limits_{v,w\in\Gamma_\delta}\|v-w\|$. Возьмем $v_1,\ v_2\in\Gamma_\delta$. Тогда существуют τ_{ij} такие, что

$$\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\left(x,\tau_j\pi\right)-\psi_j\left(x\right)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\delta\pi\sqrt{E},\ i=0,1,\ j=0,1,...,p-1,\ \left|\tau_{ij}-\alpha\right|\le\delta$$

и пусть

$$u\left(x,t\right)=v_1\left(x,t\right)-v_2\left(x,t\right),\left(x,t\right)\in[0,\pi]\times[0,+\infty) \qquad (6)$$

Тогда$u\in C_{x,t}^{2k,2p}\left([0,\pi]\times[0,+\infty)\right)$. Более того, что легко проверить, u удовлетворяет уравнению (1), условиям (2) и следующим

$$\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\left(x,0\right)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le 2\delta\pi\sqrt{E},\ \ j=0,1,...,p-1, \qquad (7)$$

$$\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\left(x,\alpha\pi\right)-\psi_j\left(x\right)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le 4\delta\pi\sqrt{E},\ \ j=0,1,...,p-1, \qquad (8)$$

$$\int\limits_0^\pi\left(\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right)^2\right)dx\le 4E,\quad t\ge 0. \qquad (9)$$

Функцию, удовлетворяющую (1) и (2) можно записать в следующей форме:

$$u(x,t)=\sum_{n\ge1}\sin nx\left\{\frac{A_n\sin n^{\frac{k}{p}}\left(\alpha\pi-t\right)}{\sin n^{\frac{k}{p}}\alpha\pi}+B_n\sin n^{\frac{k}{p}}t\right\}.$$

Аналогично, условия (7)-(9) переписываются следующим образом:

$$\sum_{n\ge1}A_n^2\le 8\delta^2\pi E, \qquad (10)$$

$$\sum_{n\ge1}B_n\sin^2 n^{\frac{k}{p}}\alpha\pi\le 32\delta^2 E, \qquad (11)$$

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(\cdot,t)\right\|_{L_2[0,\pi]}^2+\left\|\frac{\partial^p u}{\partial t^p}(\cdot,t)\right\|_{L_2[0,\pi]}^2\le 4E,\ t\ge 0. \qquad (12)$$

Введем следующее обозначение:

$$\sigma_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{A_n\sin n^{\frac{k}{p}}\left(\alpha\pi-t\right)}{\sin n^{\frac{k}{p}}\alpha\pi}+B_n\sin n^{\frac{k}{p}}t\right),$$

и из (12) мы находим

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(\cdot,t) \right\|^2_{L_2[0,\pi]} \le \sum_{n\ge 1} n^{2k}\sigma_n^2 \le 4E,$$

откуда

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2[0,\pi]} = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n^2 < \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 + \frac{4E}{N^{2k}}.$$

Итак, мы получили следующую оценку:

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2[0,\pi]} < \tfrac{\pi}{2} \max_{n=1,N} \left(\sin n^{\frac{k}{p}} \alpha\pi\right)^{-2} \sum_{n=1}^{N} \Big[A_n^2 \sin^2 n^{\frac{k}{p}} (\alpha\pi - t) + B_n^2 \sin^2 n^{\frac{k}{p}} \alpha\pi \cdot \sin^2 n^{\frac{k}{p}} t +$$
$$+ 2|A_n||B_n| \left|\sin n^{\frac{k}{p}} (\alpha\pi - t)\right| \left|\sin n^{\frac{k}{p}} t\right| \left|\sin n^{\frac{k}{p}} \alpha\pi\right| \Big] + \tfrac{4E}{N^{2k}}.$$

Поэтому, из (10) и (11) следует

$$\max_{t\in[0,\alpha\pi]} \|u(\cdot,t)\|^2_{L_2[0,\pi]} = \|u\|^2 < 40\delta^2\pi^2 E \max_{n=1,N} \left(\sin n^{\frac{k}{p}} \alpha\pi\right)^{-2} + \frac{4E}{N^{2k}}, N = 1,2,\dots.$$

Пусть

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

цепная дробь для α, где a_n натуральные числа, $a_n \ge 1$.

Мы рассматриваем множество иррациональных чисел с ограниченными a_n, т.е такие числа α, для которых существует постоянная A_α такая, что $a_n \le A_\alpha$ для всех n . Отметим, что если α иррациональное число второго порядка, тогда разложение α в цепную дробь будет периодичным, а следовательно и все a_n будут ограничены.

Из теории непрерывных дробей [6] легко получается

$$\max_{n=1,N} \left(\sin n^{\frac{k}{p}} \alpha\pi\right)^{-2} < \left(\sin \frac{\pi}{(A_\alpha + 2) N^{\frac{k}{p}}}\right)^{-2}, N = 1,2,\dots.$$

Т.к. $\sin x \ge \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} x$ при $x \in \left[0, \pi/3\right]$, то для каждого N имеем

$$\|u\|^2 < \frac{160}{27} \delta^2 \pi^2 E (A_\alpha + 2)^2 N^{\frac{2k}{p}} + \frac{4E}{N^{2k}}, \ N = 1,2,\dots. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{160}{27} \delta^2 \pi^2 E (A_\alpha + 2)^2 t^{\frac{2k}{p}} + 4Et^{-2k}.$$

Свое минимальное значение при $t > 0$ функция g достигает в

$$\bar{t} = \left(\frac{27p}{40}\right)^{\frac{p}{2k(p+1)}} (\delta\pi (A_\alpha + 2))^{-\frac{p}{k(p+1)}}$$

Т.к. g возрастает на интервале $[\bar{t},+\infty)$, находим

$$g([\bar{t}+1]) < g(\bar{t}+1).$$

Тогда получаем

$$\|u\|^2 \le \frac{160E}{27}(\delta\pi(A_\alpha+2))^{\frac{2p}{p+1}}\left[1+\left(\left(\frac{27p}{40}\right)^{\frac{p}{(p+1)2k}}+(\delta\pi(A_\alpha+2))\right)^{\frac{p}{(p+1)k}}\right]^{\frac{2k}{p}}. \tag{14}$$

Итак, мы доказали следующую

Теорема 1. *Пусть α иррациональное число, разложимое в цепную дробь с ограниченными коэффициентами. Тогда $(Diam\Gamma_\delta)^2$ удовлетворяет неравенству (14).*

Для дальнейшего используем некоторые результаты полученные в [7]. Согласно следствию 6 из [7], если α имеет порядок $\Omega<\infty$, тогда существует постоянная $K=K(\theta,\alpha)>0$ что для любого $\delta>0$, и число $\xi\in R\backslash Q$ такого, что

$$|\xi-\alpha|<\delta, \tag{15}$$

выполняется следующее

$$\max_{n=1,N}(\sin n\pi\xi)^{-2} \le \left(\sin\left(\frac{\pi\left(3-\sqrt{5}\right)}{2N}\right)\right)^{-2} \tag{16}$$

при всех $N\ge K\delta^{-\theta}$. Из (15) следует, что для каждого τ_j удовлетворяющего $\left|\tau_j-\alpha\right|\le\delta$ верно $\left|\xi-\tau_j\right|\le 2\delta$.

Если u определено (6), из (8) находим

$$\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,\xi\pi)\right\|_{L_2[0,\pi]} \le 4\delta\pi\sqrt{E},\;\; j=0,1,...,p-1. \tag{17}$$

Итак, u удовлетворяет (1), (2), (7), (9) и (17). Решение $u\in C^{2k,2p}_{x,t}([0,\pi]\times[0,+\infty))$ задачи (1), (2), (7), (9) и (17) запишем в форме

$$u(x,t)=\sum_{n\ge1}\sin nx\left\{\frac{A_n\sin n^{\frac{k}{p}}(\xi\pi-t)}{\sin n^{\frac{k}{p}}\xi\pi}+B_n\sin n^{\frac{k}{p}}t\right\}.$$

Она будет удовлетворять (10), (12) и

$$\sum_{n\ge1}B_n\sin^2 n^{\frac{k}{p}}\xi\pi \le 72\delta^2 E. \tag{18}$$

Аналогично, как и в доказательстве теоремы 1, имеем

$$\|u\|^2 < 80\delta^2\pi^2 E\max_{n=1,N}\left(\sin n^{\frac{k}{p}}\xi\pi\right)^{-2}+\frac{4E}{N^{2k}},\; N=1,2,\dots.$$

Используя (16) и то, что$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ для всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, находим

$$\|u\|^2 < \frac{80}{(3-\sqrt{5})^2}\delta^2\pi^2 E N^{\frac{2k}{p}} + \frac{4E}{N^{2k}}, \; N \geq K\delta^{-\theta}. \tag{19}$$

Исследуем следующую функцию

$$g(t) = \frac{80}{(3-\sqrt{5})^2}\delta^2\pi^2 E t^{\dfrac{2k}{p}} + \frac{4E}{t^{2k}}, \; t > 0. \tag{20}$$

Функция g достигает своего минимума при $t > 0$ в точке

$$\bar{t} = \left(\frac{p}{20}\right)^{\dfrac{p}{2k(p+1)}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{\pi\delta}\right)^{\dfrac{p}{k(p+1)}}.$$

Выберем δ из интервала

$$0 < \delta < \left\{ K\left(\frac{p}{20}\right)^{\dfrac{p}{2k(p+1)}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{\pi\delta}\right)^{\dfrac{p}{k(p+1)}} \right\}^{\dfrac{k(p+1)}{k\theta(p+1)-p}}. \tag{21}$$

Тогда из (21) следует, что $\bar{t} < K\delta^{-\theta}$. Пусть $\overline{N}$ натуральное число $\geq K\delta^{-\theta}$, при котором правая часть неравенства (20) достигает минимального значения. Т.к. функция g возрастающая на интервале $[\bar{t}, +\infty)$, $\overline{N}$ удовлетворяет $K\delta^{-\theta} \leq \overline{N} < K\delta^{-\theta} + 1$, то

$$\|u\|^2 \leq g\left(K\delta^{-\theta} + 1\right),$$

и наконец

$$\|u\|^2 \leq \frac{80\pi^2 E}{(3-\sqrt{5})^2}\left[K\delta^{\frac{k}{p}-\theta} + \delta^{\dfrac{k}{p}}\right]^{\dfrac{2k}{p}} + \frac{4E\delta^{2k\theta}}{K^{2k}} \tag{22}$$

что доказывает следующую:

Теорема 2. *Пусть αиррациональное число порядка $\Omega < \infty$. Тогда для любого фиксированного θ, $\dfrac{\Omega}{\Omega+1} < \theta < 1$, существует постоянная $K = K(\theta, \alpha) > 0$ такая, что*

$$\|u\|^2 \leq \frac{80\pi^2 E}{(3-\sqrt{5})^2}\left[K\delta^{\dfrac{k}{p}-\theta} + \delta^{\dfrac{k}{p}}\right]^{\dfrac{2k}{p}} + \frac{4E\delta^{2k\theta}}{K^{2k}}$$

при любом $0 < \delta < \left\{ K\left(\frac{p}{20}\right)^{\dfrac{p}{2k(p+1)}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{\pi\delta}\right)^{\dfrac{p}{k(p+1)}} \right\}^{\dfrac{k(p+1)}{k\theta(p+1)-p}}.$

В заключении приведем следующую:

Теорема 3. *Задача (1)-(5) устойчива тогда и только тогда, если* α *иррационально. Более того, если* α *иррационально,тогда* $\lim\limits_{\delta\to 0}(Diam\Gamma_\delta)=0$ *равномерно по* $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$, $(j=0,1,...,p-1)$

Доказательство. Пусть $\alpha\notin Q$. Тогда согласно следствию 9 из [4], существует функция $f(\delta)$ такая, что

$$\lim_{\delta\to 0}f(\delta)=\infty, \lim_{\delta\to 0}\delta f(\delta)=0, \tag{23}$$

и для всех достаточно малых δ, числа $\xi\notin Q$, удовлетворяющая (15) и (16) при всех $N\geq f(\delta)$. Подставляя эту функцию вместо аргумента при доказательстве теоремы 2 получаем, что

$$\|u\|^2\leq g(f(\delta)+1),$$

где g определена по формуле (20), т.е.

$$\|u\|^2\leq\frac{80\pi^2E}{(3-\sqrt{5})^2}\left[f(\delta)\,\delta^{\frac{k}{p}}+\delta^{\frac{k}{p}}\right]^{\frac{2k}{p}}+\frac{4E}{f(\delta)^{2k}}.$$

Из (23), заключаем

$$\lim_{\delta\to 0}(Diam\Gamma_\delta)=0.$$

□

Библиографический список

1. Bourgin D.G., Duffin. R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. vol. 45. p. 851-858.
2. D.Fox-C. Pucci. The Dirichlet problem for the wave equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1958. (IV). vol. XLVI. p. 155-182.
3. John F. The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. 1941. vol. 63 . p.141-154.
4. Юлдашева А.В. Об одной задаче для уравнения высокого порядка // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2012. №5. С. 11-14.
5. Юлдашева А.В. Об одной задаче для уравнения высокого порядка // Вестник КРАУНЦ. физико-математические науки. 2014. №2(9). С. 17-22.
6. Khinchin A.Ya. Continued fractions. The Universiry of Chicago Press, 1964. 112 p.
7. Viola C. Diophantine approximation in short intervals // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa.1979. vol. 6. p. 703-717.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.03.2015