

УДК 517.955

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА *

Р.И. Паровик^{1, 2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложены математические модели неклассических динамических систем. С помощью численного метода разностных схем в зависимости от различных параметров системы были найдены численные решения моделей. Построены фазовые траектории.

Ключевые слова: оператор Герасимова–Капуто, численное решение, разностная схема, фазовые траектории

© Паровик Р.И., 2014

MSC 35C05

NUMERICAL ANALYSIS SOME OSCILLATION EQUATIONS WITH FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES

R.I. Parovik^{1, 2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

The paper presents a mathematical model of non-classical dynamic systems. A numerical method of difference schemes, depending on various parameters of the system were found numerical solutions of models. The phase trajectory.

Key words: operator Gerasimov-Caputo, numerical solution, finite difference scheme, the phase trajectories

© Parovik R.I., 2014

*Работа выполнена в рамках проекта №12-И-ОФН-16 «Фундаментальные проблемы воздействия мощными радиоволнами на атмосферу и плазмосферу Земли» и при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» на 2012-2016 гг.

Введение

Построение математических моделей, учитывающих фрактальные свойства различных сред, имеет очень важное теоретическое и практическое значение. Например, в пористой геологической среде (геосреде) в силу неоднородности и сложной топологии пор интерес представляет фрактальная размерность геосреды, которая влияет на интенсивность процессов. Эти процессы принято называть нелокальными или процессами с памятью [1].

Описание нелокальных процессов осуществляется с помощью математического моделирования – дифференциальных уравнений дробных порядков. Порядки дробных производных тесно связаны с фрактальной размерностью среды [2] и их функциональную зависимость можно установить экспериментально.

Фрактальная размерность среды может изменяться в зависимости от времени и пространственной координаты. Поэтому порядок дробной производной в общем случае является некоторой функцией от времени и пространственной координаты и, следовательно, это значительно усложняет вид уравнений, описывающих нелокальные процессы. Решения таких уравнений находятся численными методами, которые можно реализовать в различных компьютерных программных средствах [3].

Эта работа является логическим продолжением работы [4].

Постановка задачи

Необходимо найти функцию смещения $u(t)$. Исследование колебаний во фрактальной среде будем проводить согласно следующему уравнению переменного дробного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\eta) + A(t)u(t) = 0, u(0) = u_0, u'(0) = 0, \quad 1 < \alpha(t) < 2, 0 < t < T, \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{u''(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\alpha(t)-1}}$ - производная дробного порядка Герасимова-

Капуто, $A(t)$ - некоторая функция, u_0 - известная величина.

Динамическая система (1) в случае $\alpha(t) = \alpha - const$ может иметь, например, один из следующих видов :

- 1) Уравнение (1) в случае, когда $A(t) = \omega^\alpha$ переходит в уравнение фрактального осциллятора [5] и в терминах оператора дробного дифференцирования Герасимова-Капуто [6].
- 2) В случае, когда в уравнении (1) выполняется соотношение $A(t) = a + b \cos(\omega t)$, то мы приходим к уравнению фрактального параметрического осциллятора [7]-[8].
- 3) Если в уравнении (1) положить $A(t) = t$, то мы приходим к уравнению фрактальных колебаний Эйри [9].

В более общем случае, когда $\alpha = \alpha(t)$, уравнение (1) можно решить методом конечных разностей. Введем τ - шаг дискретизации, причем $t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, N, N\tau = T$,

$u(j\tau) = u_k$. Тогда производную дробного порядка в уравнении (1) можно аппроксимировать следующим образом [3]

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\eta) = \frac{\tau^{-\alpha_j}}{\Gamma(3-\alpha_j)} \sum_{k=0}^{j-1} \left[(k+1)^{2-\alpha_j} - k^{2-\alpha_j} \right] (u_{j-k+1} - 2u_{j-k} + u_{j-k-1}). \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в уравнение (1) и после некоторых преобразований в итоге мы получаем явную разностную схему:

$$u_{j+1} = [2 - A_j/B_j] u_j - u_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} b_k (u_{j-k+1} - 2u_{j-k} + u_{j-k-1}), \quad (3)$$

где $b_k = (k+1)^{2-\alpha_j} - k^{2-\alpha_j}$, $B_j = \frac{\tau^{-\alpha_j}}{\Gamma(3-\alpha_j)}$, $u_1 = u_0$.

Численное моделирование

Положим для простоты $u_0 = 1$. Рассмотрим некоторые динамические системы согласно (1).

1. **Фрактальный осцилятор.** Рассмотрим случай $\alpha(t) = \alpha - const$ и $A(t) = A - const$. С помощью системы Maple построим расчетные кривые решений (3) и соответствующее ему точное решение.

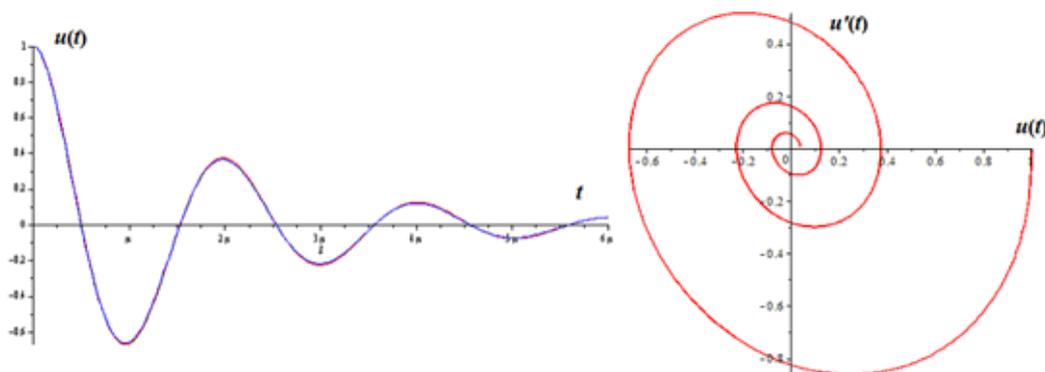


Рис. 1. а) расчетные кривые, полученные по формуле (3) (красная линия) и точное решение – (синяя линия при значении параметров $A = 1, \alpha = 1.8, t \in [0, 6\pi]$). б) фазовая траектория

Из рис. 1а видно, что схема (3) хорошо аппроксимирует точное решение и колебания имеют затухающий характер. Это подтверждает фазовая траектория, имеющая устойчивый фокус (рис. 1б).

2. **Фрактальный осцилятор с переменным параметром α .** Рассмотрим случай, когда в решении (3) $\alpha(t) = \frac{(1-\varepsilon-\delta)\cos(t \cdot m) + \varepsilon - \delta + 3}{2}$ и $A(t) = 1$, где δ и ε определяют границы изменения параметра $\alpha(t)$: $1 + \varepsilon < \alpha < 2 - \delta$, причем $\delta + \varepsilon < 1, \delta, \varepsilon \geq 0, m$ - произвольное число [6].

Из рис. 2а видно, что колебательный процесс имеет затухающий характер, но фазовые траектории в отличие от предыдущего случая (рис. 1б) деформированы

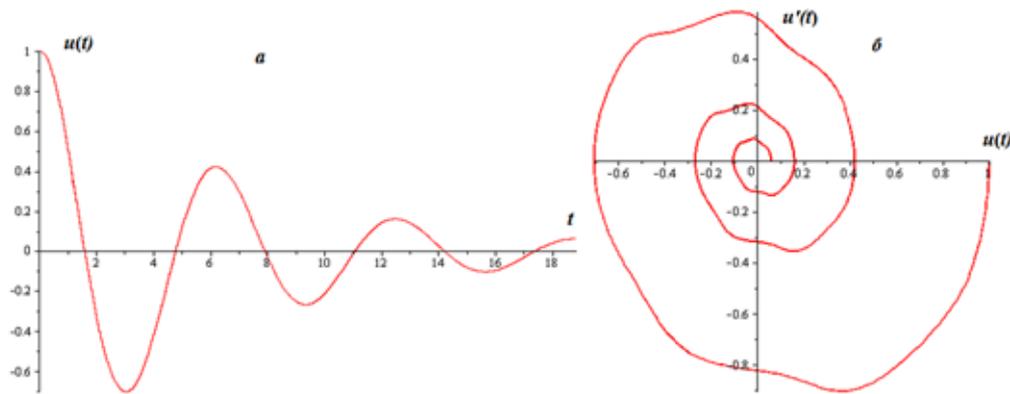


Рис. 2. а) расчетная кривая решения уравнения (1) в случае $\alpha(t) = \frac{(1 - \varepsilon - \delta) \cos(t \cdot m) + \varepsilon - \delta + 3}{2}$; б) фазовая траектория

(рис. 2б). Этот факт указывает, что в этом случае колебательный процесс затухает медленнее.

3. **Фрактальный осциллятор Эйри.** Рассмотрим случай, когда

$$\alpha(t) = \frac{(1 - \varepsilon - \delta) \cos(t \cdot m) + \varepsilon - \delta + 3}{2}, A(t) = t.$$

Параметры задачи выбирались: $m = 7, \varepsilon = 0.69, \delta = 0.003, a = 1.8, \omega = 3.$

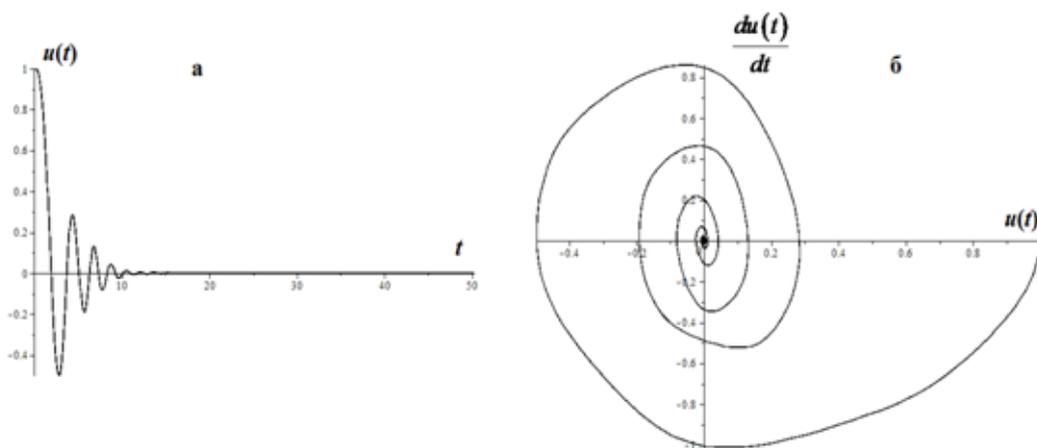


Рис. 3. а) расчетная кривая б) фазовая траектория

На рис. 3а видно, что колебательный процесс имеет быстро затухающий характер, а фазовая траектория (рис. 3б) представляется изогнутой, но близка по форме к устойчивому фокусу. Такое поведение решения хорошо согласуется с ранее полученными результатами [8].

Учет свойства эрeditarности в модельном уравнении (1), по-видимому, приводит к быстрой диссипации энергии колебательной системы и уменьшению времени до ее полной релаксации.

4. **Фрактальный параметрический осциллятор.** Рассмотрим случай, когда $\alpha(t) = \frac{(1 - \varepsilon - \delta) \cos(t \cdot m) + \varepsilon - \delta + 3}{2}$ и $A(t) = a + b \cos(\omega t).$ Параметры задачи выбирались: $m = 7, \varepsilon = 0.69, \delta = 0.003, a = 1.8, \omega = 3.$

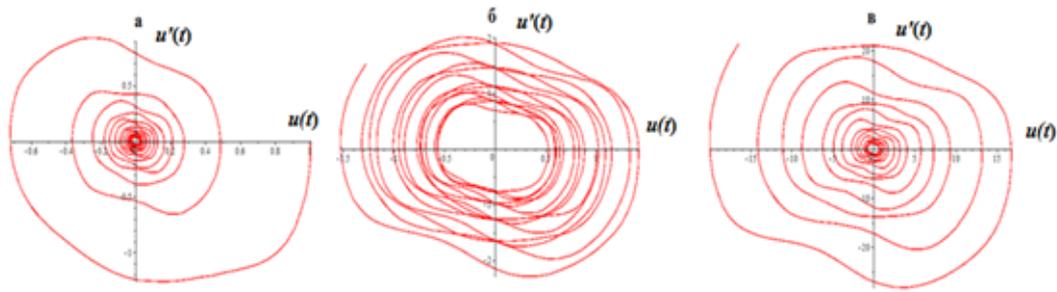


Рис. 4. Фазовые траектории а) - $b = 0.9$; б) - $b = 1$; в) - $b = 1.2$

Необходимо отметить, что фазовые траектории рис. 4 подтверждают возможность использования дробного исчисления в описании нелинейных эффектов. Действительно на рис. 4а фазовая траектория закручивается по часовой стрелке, а особая точка представляет собой устойчивый фокус.

На рис. 4б фазовый портрет меняется: сначала траектория закручивается по часовой стрелке, а потом, начиная с некоторого момента времени t , раскручивается.

Кульминацией такого перехода является фазовая траектория рис. 4в, на которой видно, что фазовая траектория раскручивается, т.е. мы видим неустойчивый фокус.

5. Обобщенный фрактальный параметрический осцилятор. Рассмотрим случай, когда $\alpha(t) = \frac{(1 - \varepsilon - \delta) \cos(t \cdot m) + \varepsilon - \delta + 3}{2}$ и $A(t) = a + b \cos_{\beta}(\omega t)$, $\cos_{\beta}(\omega t) = E_{\beta,1}[-(\omega t)^{\beta}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t\omega)^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 1)}$ - функция типа Миттаг-Леффлера. Параметры задачи выбирались: $m = 7$, $\varepsilon = 0.69$, $\delta = 0.003$, $a = 1.8$, $\omega = 3$, $\beta = 1.2$.

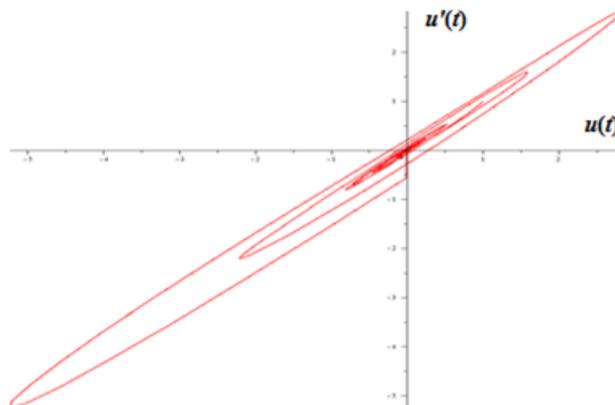


Рис. 5. Фазовая траектория (случай 5)

На рис. 5 видно как меняется фазовый портрет по сравнению с другими случаями. Фазовая траектория помимо нелинейных эффектов как в случае 4, сильно сжимается.

Необходимо отметить, что в отличие от работы [6] фазовые траектории в этой статье построены в плоскости $[u(t), u'(t)]$, а не в плоскости $[u(t), \partial_{0t}^{\alpha-1} u(\eta)]$. Поэтому мы не наблюдаем здесь эффектов, связанных с появлением в центре фазовой плоскости точки многократного возврата.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложение. М.: Физматлит, 2003. С. 272.
2. Шогенов В.Х., Ахкубеков А.А., Ахкубеков Р.А. Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения // Известие вузов Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. №1. С.46-50.
3. Shen S., Liu F. Error analysis of an explicit difference approximation for the fractional diffusion equation with insulated ends // ANZIAM J. 2005. 46(E). pp. 871-887.
4. Паровик Р.И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. №1(8). С. 60-65.
5. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos, Solitons and Fractals, 9(7), 1996, pp. 1461-1477.
6. Мейланов Р.П., Янполов М.С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма ЖТФ, 2002. Т 28. вып. 1. С. 67-73.
7. Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения Матъе // Доклады АМАН. 2011. Т. 13. №2. С. 90-98.
8. Parovik R.I. Fractal Parametric Oscillator as a Model of a Nonlinear Oscillation System in Natural Mediums // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2013. Vol. 6. P. 134-138.
9. Паровик Р.И. Задачи Коши для обобщенного уравнения Эйри // Доклады АМАН. 2014. Т. 16. №3. С.64-69.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.06.2014