

МАТЕМАТИКА

УДК 512.24

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ ПОДГРУППЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ГРУПП

А.П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: as2021@mail.ru

Устанавливается, что конечно порожденные подгруппы бесконечного индекса в гиперболических группах, не являющихся почти абелевыми, дополняемы нетривиальным свободным множителем.

Ключевые слова: гиперболическая группа, свободное произведение, свободное произведение с объединением, порождающее множество, индекс подгруппы, нормальный делитель

© Горюшкин А.П., 2014

MATHEMATICS

MSC 18A32

FINITE GENERATED SUBGROUPS OF HYPERBOLIC GROUPS

A.P. Goryushkin

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: as2021@mail.ru

It is proved that finite generated subgroups of infinite index of hyperbolic groups which are not quasi Abelian are complemented with a nontrivial free factor.

Key words: hyperbolic group, free product, free product with amalgamation, set of generators, index of a subgroup, normal subgroup

© Goryushkin A.P., 2014

Подгруппа H группы G называется свободно дополняемой, если в группе G существует такая нетривиальная подгруппа Q , что подгруппа, порожденная подгруппами H, Q является их свободным произведением: $\langle H, Q \rangle = H * Q$.

Понятно, что подгруппы конечной группы или абелевой группы не могут быть свободно дополняемыми. То же самое касается и подгрупп почти абелевой группы, например, бесконечной группы диэдра.

Цель работы показать, что в гиперболической группе, не являющейся почти абелевой, и заданной представлением:

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, c_1, \dots, c_t, d_1, \dots, d_s; \quad (1)$$

$$c_1^{\gamma_1}, \dots, c_t^{\gamma_t}, [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] c_1 \dots c_t, d_1 \dots d_s \rangle,$$

где $[a_i, b_i] = a_i^{-1} b_i^{-1} a_i b_i$; $n, s, t \geq 0$; $\gamma_i > 1$ – любая конечно порожденная нетривиальная подгруппа бесконечного индекса свободно дополняема.

Теорема. Если G – дискретная группа, сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости, G – не почти абелева и не изоморфна группам с представлением:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n; ([a_1, b_1] \dots [a_n, b_n])^k \rangle \langle a, b; a^n, b^m (ab)^k \rangle,$$

где $k > 1$, H – конечно порожденная подгруппа группы G , то в G существует бесконечно порожденная подгруппа Q такая, что подгруппа, порожденная подгруппами H и Q , является свободным произведением $H * Q$.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму о подгруппах свободного произведения с объединенной подгруппой.

ЛЕММА. Пусть G – свободное произведение двух групп A и B с объединенной подгруппой U , причем один из множителей является нетривиальным свободным произведением, отличным от группы диэдра, U удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, и H – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в G . Тогда в группе G существует бесконечно порожденная подгруппа Q такая, что подгруппа, порожденная подгруппами H и Q , является свободным произведением $H * Q$.

Доказательство. Пусть $G = A *_U B$ удовлетворяет условию теоремы, и H – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в группе G .

Индекс подгруппы U в группе A бесконечен, поэтому если H окажется в сопряжении подгруппы U , то H имеет бесконечный индекс в группе A . Конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в свободном произведении, отличном от бесконечной диэдральной группы, обладает свойством свободной дополняемости (см. [1]). Более того, дополняющий множитель содержит свободную группу ранга два, и, следовательно, его можно с самого начала считать свободной группой счетного ранга.

Итак, можно считать, что H не лежит в сопряжении подгруппы U . Кроме того, бесконечность индекса $[G: H]$ влечет бесконечность разложения по двойному модулю $[G: (H, U)]$. Из теоремы 1.7 из [2] следует бесконечность индекса $[A: (U, U)]$.

Далее воспользуемся обозначениями из [3].

Пусть S – множество элементов из группы $A *_U B$, причем каноническая форма элемента s из S имеет вид

$$s = s_{1(s)} g_{2(s)} \dots g_{n(s)}.$$

Определим множество $\bar{t}_X(S)$, зависящее от S и от $X(X=A$ или $X=B)$, по правилу:

$$\bar{t}_X(S) = \{x \in X \mid x \equiv g_{n(s)} \pmod{(U, U)}; s \in S \setminus (A \cup B)\}.$$

Теперь для подходящего элемента g из G множество $\bar{t}_B(H^g)$ пусто, а $\bar{t}_A(H^g) = \{Ua_0U\}$, где a_0 – любой фиксированный, наперед заданный элемент из $A \setminus U$.

Можно считать, что подгруппа H уже обладает этим свойством, то есть, что элемент gu – единичный, а элемент a_0 из $A \setminus U$ выбран таким образом, что подгруппа R , порожденная подгруппой U и элементом a_0 , имеет бесконечный индекс в подгруппе A .

Для каждого элемента d из $D = A \cap H$ и каждого элемента t из $\bar{t}_A(H)$ произведение td снова принадлежит множеству $\bar{t}_A(H)$, равному по предположению Ua_0U .

Другими словами, каждый элемент d из D можно представить в виде:

$$d = u_1 a_0^{-1} u_2 a_0 u_3,$$

где u_1, u_2, u_3 – подходящие элементы из объединяемой подгруппы U .

Отсюда следует, что D содержится в R . По теореме 1.8 из [3] найдется такая бесконечная подгруппа Q из A , что $gp(R, Q) = R * Q$.

Покажем теперь, что подгруппа \bar{H} , порожденная подгруппами H и Q , является их свободным произведением $H * Q$. Для этого нужно установить, что элемент p из \bar{H} , являющийся произведением вида

$$p = p_1 p_2 \dots p_n, \tag{2}$$

где $n \geq 1$, а p_i – не единичные элементы, выбранные альтернативно из подгрупп Q и H , отличен от единицы.

Если все элементы p_i из (1), которые входят в H , являются одновременно и элементами из A (т. е. принадлежат пересечению D), то элемент p принадлежит свободному произведению $Q * D$, и (2) является нормальной формой элемента p относительно разложения $Q * D$.

Поэтому можно считать, что не все p_i из разложения (2) являются элементами из A . Рассмотрим тогда вместо (2) другое разложение элемента p ,

$$p = q_1 q_2 \dots q_k, \tag{3}$$

где $1 \leq k < n$, полученное из (2) некоторой группировкой множителей p_i . Точнее, элемент q_j – это некоторое p_i , если $p_i \in H \setminus A$, либо же q_j является произведением $p = p_\alpha p_{\alpha+1} \dots p_\beta$, где $1 \leq \alpha < \beta \leq n$, и все множители $p_\alpha, p_{\alpha+1}, \dots, p_\beta$ принадлежат множителю A , но элемент $p_{\alpha-1}$ (в случае, когда $\alpha > 1$) и элемент $p_{\beta+1}$ (в случае, когда $\beta < n$) не принадлежат A .

Таким образом, в разложении (3) множители оказываются поочередно выбранными из $H \setminus A$ и свободного произведения $Q * R$. При этом если q_j – элемент из $Q * R$, то он не входит в свободный множитель R . Это значит, что для каждых элементов r_1, r_2 из R произведение $r_1 q_j r_2$ также не принадлежит подгруппе R .

С другой стороны, если $h \in H \setminus A$ и $h = h_1 h_2 \dots h_m$ – его каноническая форма, то, так как $\bar{t}_A(H) \subseteq R$, получаем, что из $h_m \in A$ следует $h_m \in R$ (и из $h_1 \in A$ следует $h_1 \in R$).

Следовательно, каноническая форма элемента p имеет, не менее чем k слогов. Но это означает, что элемент p отличен от единицы, и, таким образом, подгруппа H_2 является свободным произведением $H * Q$.

Утверждение леммы доказано.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы.

Если в группе с представлением (1) параметр $s > 0$, то G является свободным произведением циклических групп второго порядка (а бесконечная группа диэдра почти абелева).

Если $s = 0$, представление (1) становится представлением вида

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, c_1, \dots, c_t; c_1^{\gamma_1}, \dots, c_t^{\gamma_t}, [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] c_1 \dots c_t \rangle,$$

Теперь, если $n > 0$ и $t > 1$, то группу G можно представить в виде

$$G = gp(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) *_U gp(c_1, \dots, c_t),$$

где $U = gp([a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]) = gp(c_t^{-1} c_{t-1}^{-1} \dots c_1^{-1})$.

Аналогично и в случае $n > 1$ и $t = 0$, и тогда, когда $n = 0$, $t > 3$.

В последнем случае может оказаться, что G является свободным произведением двух групп диэдра с объединенной циклической подгруппой,

$$G = \langle c_1, c_2, c_3, c_4, c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_4^2, c_1 c_2 c_3 c_4 \rangle.$$

В таком случае группа G – снова почти абелева. Действительно, циклическая подгруппа, порожденная элементом $c_1 c_2 (c_1 c_3)^2$ имеет конечный индекс в G .

Если $s = n = 0$, $t \leq 2$, то группа G конечна.

Итак, все гиперболические группы, кроме случаев, когда в представлении (1) $s = 0, n > 0, t = 1$ или $s = 0, n = 0, t = 3$, подпадают под условия леммы.

Теорема доказана. \square

Отметим, что работе [4] другими средствами получены необходимые и достаточные условия существования свободной дополняемости квазивыпуклых подгрупп бесконечного индекса в гиперболической группе.

Библиографический список

1. Горюшкин А.П. О конечно порожденных подгруппах свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. 1972. №117. С. 11–43.
2. Горюшкин А.П. Группы, разложимые в свободное произведение (строение и применение). Саарбрюккен: Pal. Acad. Publ., 2012. 142 с.
3. Горюшкин А.П. О подгруппах почти амальгамированного произведения двух групп с конечной объединенной подгруппой // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2012. № 1(4). С. 5–10.
4. Дудкин Ф.А., Свиридов К.С. Дополнение подгруппы гиперболической группы свободным множителем // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 3. С. 332–351.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 02.09.2014