

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.938

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА ОТ ВРЕМЕНИ *

Р.И. Паровик^{1, 2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложена модель фрактального осциллятора с переменным показателем дробного порядка. Получено и исследовано численное решение модели. Построены фазовые траектории.

Ключевые слова: оператор Герасимова–Капуто, численное решение, разностная схема, фазовые траектории.

© Паровик Р.И., 2014

MATHEMATICAL MODELING

MSC 34C26

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF EQUATIONS FRACTAL OSCILLATOR WITH VARIABLE ORDER FRACTIONAL OF TIME

R.I. Parovik^{1, 2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

We propose a model of a fractal oscillator with variable fractional order. Received and investigated by numerical solution of the model. The phase trajectory.

Key words: operator Gerasimov-Caputo, numerical solution, finite difference scheme, the phase trajectories

© Parovik R.I., 2014

*Работа выполнена в рамках проекта №12-И-ОФН-16 «Фундаментальные проблемы воздействия мощными радиоволнами на атмосферу и плазмосферу Земли» и при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» на 2012-2016 гг.

Введение

Построение математических моделей, учитывающих фрактальные свойства различных сред, имеет очень важное теоретическое и практическое значение. Например, в пористой геологической среде (геосреде) в силу неоднородности и сложной топологии пор важной ее характеристикой является фрактальная размерность, которая определяет интенсивность процессов происходящих в ней. Эти процессы принято называть нелокальными [1].

Описание нелокальных процессов осуществляется с помощью математического моделирования - уравнений с производными дробных порядков, которые связаны с фрактальной размерностью среды [2].

Фрактальная размерность среды может меняться в зависимости от времени и пространственной координаты. Поэтому порядок дробной производной в общем случае является функцией от времени и пространственной координаты и, следовательно, усложняется вид уравнений, описывающих нелокальные процессы. Решение таких уравнений находится численными методами, которые можно реализовать в различных компьютерных программных средствах [3].

Постановка задачи

В работе рассматривается процесс колебаний во фрактальной среде, который можно описать следующим уравнением переменного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(\eta) + Ax(t) = 0, x(0) = C_0, x'(0) = 0, \quad 1 < \alpha(t) < 2, 0 < t < T, \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{x''(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\alpha(t)-1}}$ - производная дробного порядка Герасимова-Капуто, A, C_0 - известные величины.

Уравнение (1) в случае, когда $\alpha(t) = \alpha - const$ переходит в известное уравнение фрактального осциллятора, но в терминах оператора Герасимова-Капуто [4].

Уравнение (1) можно решить численными методами. Введем τ - шаг дискретизации, причем $t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, N, N\tau = T, x(j\tau) = x_k$. Тогда производную дробного порядка в уравнении (1) можно аппроксимировать следующим образом [5]

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(\eta) = \frac{\tau^{-\alpha_j}}{\Gamma(3 - \alpha_j)} \sum_{k=0}^{j-1} \left[(k+1)^{2-\alpha_j} - k^{2-\alpha_j} \right] (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) + O(\tau). \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в уравнение (1) и после некоторых преобразований в итоге мы получаем явную разностную схему:

$$x_{j+1} = [2 - A/A_j] x_j - x_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} b_k (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}), \quad (3)$$

где $b_k = (k+1)^{2-\alpha_j} - k^{2-\alpha_j}, A_j = \frac{\tau^{-\alpha_j}}{\Gamma(3 - \alpha_j)}, x_0 = C_0, x_1 = x_0$.

Надо отметить, что в случае, когда $\alpha(t) = \alpha - const$ решение уравнения (1) можно записать через функцию типа Миттаг-Леффлера:

$$x(t) = C_0 E_{\alpha,1}(-At^\alpha), \quad (4)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера, $\Gamma(x)$ – функция Гаусса.

Численное моделирование

Положим для простоты $C_0 = 1$. С помощью системы Maple построим расчетные кривые решений (3) и (4) для этого реализуем следующие команды:

```
> restart;
> with (plots):
> T:=6*Pi:
> n:=1000:
> A:=1;
> a:=1.8:
> tau:=evalf(T/n):
> x[0]:=1:
> x[1]:=1:
> B:=(tau^a)/GAMMA(3-a):
> for j from 1 to n-1 do
x[j+1]:=(2-A/B)*x[j]-x[j-1]-sum(((k+1)^(2-a) - k^(2-a))*(x[j - k+1]-2*x[j - k]+x[j-1]),k=1..j-1):
y[0]:=0:
y[j]:=(x[j+1]-x[j])/tau:
od:
> R:=seq([j*tau,x[j]],j=0..n-1);
> A1:=pointplot([R],style=line, color=red)
> f:=sum((-l^a)^k/GAMMA(a*k+1),k=0..infinity):
> A2:=plot(f,l=0..6*Pi, color=blue)
> display(A1,A2);
```

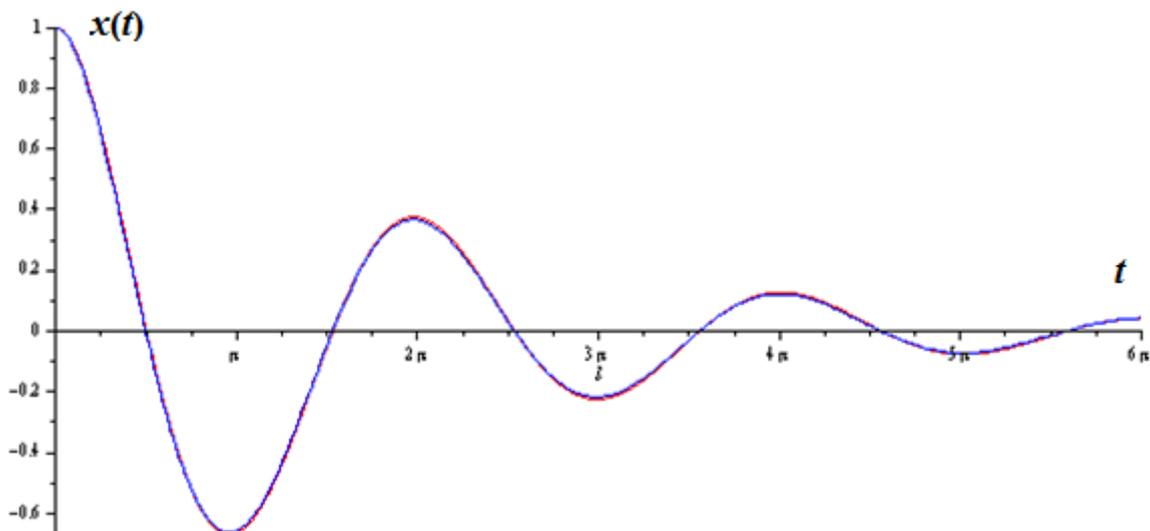


Рис. 1. Расчетные кривые, полученные по формуле (3) красная линия и точное решение (4) – синяя линия при значении параметров $A = 1, \alpha = 1.8, t \in [0, 6\pi]$

Из рис.1 видно, что схема (3) хорошо аппроксимирует точное решение (4) и колебания имеют затухающий характер. Это подтверждает фазовая траектория, имеющая устойчивый фокус (рис.2).

```
> pointplot([seq([x[j],y[j]],j = 0..n - 1)],style = line,color = red):
```

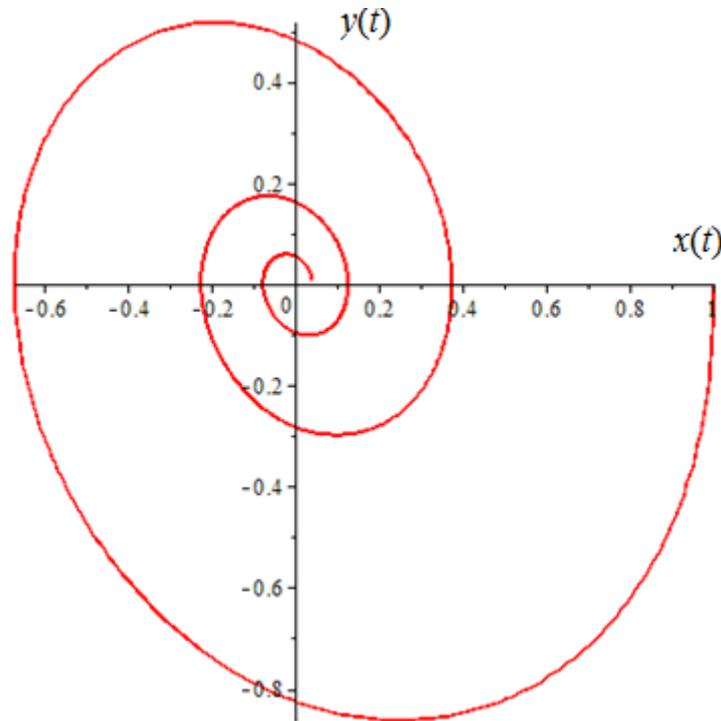


Рис. 2. Фазовая траектория

Рассмотрим случай, когда в решении (3) $\alpha(t) = \frac{(1-\epsilon-\delta)\cos(t\cdot m)+\epsilon-\delta+3}{2}$, где δ и ϵ определяют границы изменения параметра $\alpha(t)$: $1 + \epsilon < \alpha < 2 - \delta$, причем $\delta + \epsilon < 1$, $\delta, \epsilon \geq 0$, m - произвольное число [5].

```
> restart:
> with (plots):
> T:=6*Pi:
> n:=1000:
> A:=1;
> a:=1.8:
> tau:=evalf(T/n):
> m:=7:
> e:=0.69:
> delta:=0.003:
> x[0]:=1:
> x[1]:=1:
> for h from 1 to n-1 do
t[h]:=h*tau:
a[h]:=evalf(1/2*((1-e-delta)*cos(m*t(h))+e-delta+3)):
B[h]:=(tau^a[h])/GAMMA(3-a[h]):
od:
> for j from 1 to n-1 do
```

```

x[j+1]:=(2-A/B[j])*x[j]-x[j-1]-sum(((k+1)^(2-a[j])-k^(2-a[j]))*(x[j-k+1]-2*x[j-k]+x[j-1-1]),k=1..j-1):

```

```

y[0]:=0:

```

```

y[j]:=(x[j+1]-x[j])/tau:

```

```

od:

```

```

> R:=seq([j*tau, x[j]],j=0..n-1);

```

```

> pointplot([R], style=line, color=red)

```

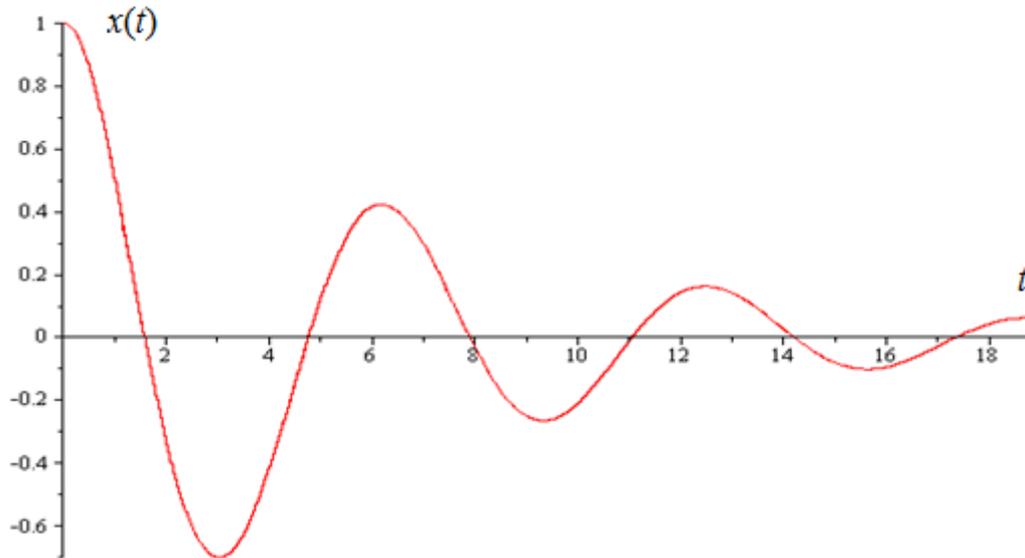


Рис. 3. Расчетная кривая решения уравнения (1) в случае $\alpha(t) = \frac{(1 - \varepsilon - \delta) \cos(t \cdot m) + \varepsilon - \delta + 3}{2}$

```

> pointplot([seq([x[j],y[j]],j=0..n-1)], style=line, color=red):

```

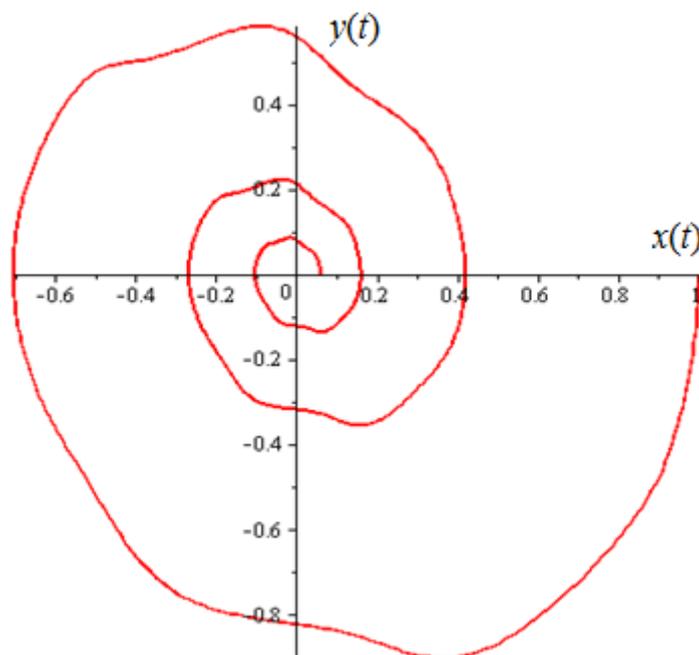


Рис. 4. Фазовая траектория

Из рис. 3 видно, что колебательный процесс имеет затухающий характер, но фазовые траектории в отличие от предыдущего случая (рис. 2) деформированы (рис. 4). Этот факт указывает, что в этом случае колебательный процесс затухает медленнее и в этом можно убедиться, например, сравнивая рис. 1 и рис. 3.

Необходимо отметить, что в отличии от работы [4] фазовые траектории (рис. 2 и рис. 4) построены в плоскости $[x(t), x'(t)]$, а не в плоскости $[x(t), \partial_{0t}^{\alpha-1}x(\eta)]$. Поэтому мы не наблюдаем эффектов, связанных с появлением в центре фазовой плоскости точки многократного возврата.

Заключение

Введение в уравнение (1) эффектов «памяти» в виде производной дробного порядка $\alpha(t)$ дает возможность более адекватно описать явления и процессы в естественных средах. В колебательных процессах введение «памяти» увеличивает время релаксации, что может быть полезным при интерпретации экспериментальных данных.

Интерес представляет, когда в уравнении (1) коэффициент $A = A(t)$. Более конкретный вид этой функции может быть следующий: $A(t) = \delta + \varepsilon \cos(\omega t)$, что определяет обобщенное уравнение Матье. Решение уравнение Матье в зависимости от параметров δ, ε может иметь незатухающий вид [6].

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Шогенов В.Х., Ахкубеков А.А., Ахкубеков Р.А. Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения // Известие вузов Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. №1. С.46-50.
3. Самарский А.А., Вабишевич П.Н., Самарская Е.А. Задача и упражнения по численным методам. М.: КомКнига, 2007. 208 с.
4. Мейланов Р.П., Янполов М.С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма ЖТФ, 2002. Т. 28. Вып.1. С.67-73.
5. Shen S., Liu F. Error analysis of an explicit difference approximation for the fractional diffusion equation with insulated ends // ANZIAM J. 2005. 46(E). P. 871-887.
6. Паровик Р.И. Обобщенное уравнение Матье // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2011. №2(3). С. 12-17.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 27.04.2014