УДК 517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ И ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Н.К. Очилова

Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, 100070, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Юсуф Хос Ходжиб, 103
E-mail: nargiz.ochilova@gmail.com

В данной статье доказывается существование и единственность решения краевой задачи для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа.

Ключевые слова: вырождается уравнение, смешанный тип, существование, единственность, краевая задача

MSC 35M13

STUDY THE UNIQUE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF FRANKL FOR MIXED-TYPE EQUATION DEGENERATE ON THE BOUNDARY AND WITHIN THE REGION

N.K. Ochilova

Tashkent State Pedagogical University by Nizami, 100070, Uzbekistan, Tashkent c., Yusuf Xos Xojib ko‘chasi st., 103
E-mail: nargiz.ochilova@gmail.com

In this paper, the existence and the uniqueness of solution of the Frankl type boundary value problem for degenerating equation of the mixed type are proved.

Key words: degenerating equation, mixed type, existence, uniqueness, boundary value problem

Введение

Развитие уравнений в частных производных обусловлено широких кругом прикладных задач в физике, экономике, биологии и в других науках. В рамках теории уравнений математической физики как дисциплины, читаемой в магистратуре, большой интерес представляют уравнения смешанного типа. Такие уравнения могут быть использованы при описании различных физических процессов от пространственных околозвуковых течений идеального политропного газа, гидродинамических течений с переходом через скорость звука до бесконечно малых изгибаний поверхностей.

Постановка задачи

В настоящей работе исследуется краевая задача типа Франкля для уравнений параболо-гиперболического типа

$$0=\begin{cases} y^{m_0}u_{xx}-x^{n_0}u_y & \text{при } \ x>0, \ \ y>0, \\ u_{xx}-(-x)^m u_{yy} & \text{при } \ x<0, \ \ y>0, \\ (-y)^n u_{xx}-u_{yy} & \text{при } \ x>0, \ \ y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где n, m, n_0, $m_0=const>0$, в области D_0 ограниченной при $x>0$, $y>0$ отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$. $D_1(D_2)$ соответственно при $x<0$, $y>0$ $(x>0,\ y<0)$ ограниченной отрезком прямой

$$AC_1=\{(x,y):\ -1\le x\le 0,\ y=0\}, \quad (AC_2=\{(x,y):\ x=0,\ -1\le y\le 0\})$$

оси Oy (Ox) и с характеристикой

$$A_0C_1:\ \ y+\frac{1}{p}(-x)^p=1, \quad \left(CC_2:\ \ x+\frac{1}{q}(-y)^q=r_0\right)$$

уравнения (1), где

$$2p_0=m_0+2, \quad 2p=m+2, \quad 2q=n+2, \quad C(r_0,0)\in AB, \quad 0<r_0<1.$$

Введем обозначения:

$$I_1=\{\,(x,y):\ x=0,\ 0<y<1\,\},\ I_2=\{\,(x,y):\ \ 0<x<r_0\,,\ y=0\,\},$$

$$D=D_0\cup D_1\cup D_2,\ D_0=D\cap\{x>0\}\cap\{y>0\},\ D_1=D\cap\{x<0\}\cap\{y>0\},$$

$$D_2=D\cap\{y<0\}\cap\{x>0\},\ D^*=D_0\cup D_{11}\cup D_{21}\cup I_1\cup I_2,\ D_{21}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q>0,\right\},$$

$$D_{22}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q<0\right\},\ D_{11}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p>0\right\},\ D_{12}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p<0\right\},$$

$$BC=\{(x,y):0<x<r_0,\ \ y=0\},\ \Delta_1=D_0\cup D_{11}\cup I_1,\ \Delta_2=D_0\cup D_{21}\cup I_2,$$

$$\alpha_0=\frac{n_0+1}{n_0+2}, \quad 2\alpha=\frac{n}{n+2}, \quad 2\beta=\frac{m}{m+2},$$

причем

$$0<2\beta<\alpha_0<1, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}, \quad m_0<n_0+1, \tag{2}$$

Через точку $E_2\,(E_1)$ обозначим точку пересечения характеристик $y=-(qx)^{\frac{1}{q}}$ и $x+\frac{1}{q}(-y)^q=r_0$, ($y=-(px)^{\frac{1}{p}}$ и $y+\frac{1}{p}(-x)^p=1$).

Задача $\mathbf{TF}_0$. *Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^{2,1}_{x,y}(D_0)\cap C^2(D_{1j}\cup D_{2j}),\ \ (j=1,2)$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях D_0 и D_{1j}, D_{2j}, $(j=1,2)$;

3) $u_x(0,y)\ \in C(\Delta_1)$, причем $u_x(+0,y)$ может иметь особенность порядка меньше $(m_0+1)(1-\alpha_0)$ при $y\to 0$ и ограничена при $y\to 1$;

4) $y^{-m_0}u_y\in C(D_0\cup I_2)$ и $u_y\in C(D_2\cup I_2)$, причем на AC выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y\to+0}y^{-m_0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\quad (x,0)\in I_2;\tag{3}$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_0(y),\quad 0\le y\le 1,\tag{4}$$

$$u(x,y)|_{CB}=\varphi_1(x),\quad r_0\le x\le 1,\tag{5}$$

$$u(x,y)|_{CE_2}=\varphi_2(x),\quad \frac{r_0}{2}\le x\le r_0,\tag{6}$$

$$u(x,y)|_{A_0E_1}=\psi_1(y),\quad \frac{1}{2}\le y\le 1,\tag{7}$$

$$u(-h_2x,0)=\lambda_1u(+x,0),\quad 0\le x\le r_0,\quad h_2=q^{1/q},\tag{8}$$

$$u(0,-h_1y)=\lambda_2u(0,y),\quad 0\le y\le 1,\quad h_1=p^{1/p},\tag{9}$$

где $\lambda_j=const$, $\left(\lambda_j\neq 1\right)$ и $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(r_0)=\varphi_2(r_0),\quad \varphi_0(0)=\varphi_1(1),\tag{10}$$

$$\varphi_0(y)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\quad \varphi_1(x)\in C[r_0,1]\cap C^2(r_0,1),\tag{11}$$

$$\varphi_2(x)\in C^3\left[\frac{r_0}{2},r_0\right],\quad \psi_1(y)\in C^3\left[\frac{1}{2},1\right].\tag{12}$$

Основное функциональное соотношение

Для доказательства единственности и существования решения задачи TF_0 важную роль играют функциональные соотношения между $\tau_i(t)$ и $\nu_i(t)$ принесенные на I_j из D_i $(i=0,1,2)$.

Известно, что решение задачи Коши для уравнения (1) в области D^-_{21} удовлетворяющее условиям

$$u(x,-0)=\tau_2^-(x),\ 0\le x\le r_0u_y(x,-0)=\nu_2^-(x),\ 0<x<r_0,\tag{13}$$

соответственно имеет вид [1]

$$u(x,y)=\gamma_1 r_0^{1-2\alpha}\int\limits_0^{r_0}\tau_2^-\left[x+\tfrac{1}{q}(-y)^q\cdot\tfrac{2z-r_0}{r_0}\right]\,(r_0-z)^{\alpha-1}z^{\alpha-1}dz-$$

$$-\gamma_2 r_0^{2\alpha-1}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{1-2\alpha}y\int\limits_0^{r_0}\nu_2^-\left[x+\tfrac{1}{q}(-y)^q\cdot\tfrac{2z-r_0}{r_0}\right]\,(r_0-z)^{-\alpha}z^{-\alpha}dz \tag{14}$$

где $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)}$, $\gamma_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{n+2}\right)^{2\alpha}\dfrac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)}$.

В силу (6) из (14), получим

$$\varphi_2\left(\frac{x+r_0}{2}\right)=\frac{2\gamma_1\Gamma(\alpha)}{r_0}(r_0-x)^{1-2\alpha}D_{xr_0}^{-\alpha}(r_0-x)^{\alpha-1}\tau_2^-(x)-$$

$$-\frac{2\gamma_2\Gamma(1-\alpha)}{r_0}D_{xr_0}^{\alpha-1}(r_0-x)^{-\alpha}\nu_2^-(x), \tag{15}$$

где $D_{ax}^{-\alpha}[\cdot]$- интегральный оператор дробного порядка $(\alpha>0)$ [2].

Применяя дифференциальные операторы $D_{xr_0}^{1-\alpha}$ к обеим частям равенства (15) с учетом

$$D_{xr_0}^{1-\alpha}(r_0-x)^{1-2\alpha}D_{xr_0}^{-\alpha}(r_0-x)^{\alpha-1}\tau_2^-(x)=(r_0-x)^{-\alpha}D_{xr_0}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x),$$

$$D_{xr_0}^{1-\alpha}D_{xr_0}^{\alpha-1}(r_0-x)^{-\alpha}\nu_2^-(x)=(r_0-x)^{-\alpha}\nu_2^-(x)$$

получим функциональное соотношение между $\tau_2^-(x)$и $\nu_2^-(x)$ на I_2 из D_{21}^-:

$$\nu_2^-(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)}{\gamma_2\Gamma(1-\alpha)}D_{xr_0}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x)-\frac{r_0(r_0-x)^{\alpha}}{2\gamma_2\Gamma(1-\alpha)}D_{xr_0}^{1-\alpha}\widetilde{\varphi}_2(x),\quad 0<x<r_0, \tag{16}$$

где $\widetilde{\varphi_2}(x)=\varphi_2\left(\dfrac{x+r_0}{2}\right)$.

Точно также как выше, используя решение задачи Коши, удовлетворяющее условиям $u(-0,y)=\tau_1^-(y),\quad 0\le y\le 1$ и $u_x(-0,y)=\nu_1^-(y),\quad 0<y<1$, для уравнения (1) в области D_{11}^- дается формулой:

$$u(x,y)=\gamma_3\int\limits_0^1\tau_1^-\left[y+\tfrac{1}{p}(-x)^p\cdot(2z-1)\right]\,(1-z)^{\beta-1}z^{\beta-1}dz+$$

$$+\gamma_4\left(\frac{4}{m+2}\right)^{1-2\beta}x\int\limits_0^1\nu_1^-\left[y+\tfrac{1}{p}(-x)^p\cdot(2z-1)\right]\,(1-z)^{-\beta}z^{-\beta}dz \tag{17}$$

где $\gamma_3=\dfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_4=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\dfrac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$.

В силу (7) из (17), получим

$$\psi\left(\frac{y+1}{2}\right)=2\gamma_3\Gamma(\beta)(1-y)^{1-2\beta}D_{y1}^{-\beta}(1-y)^{\beta-1}\tau_1^-(y)-$$

$$-2\gamma_4\Gamma(1-\beta)D_{y1}^{\beta-1}(1-y)^{-\beta}\nu_1^-(y), \tag{18}$$

где $D_{y1}^{-\beta}[\cdot]$- интегральный оператор дробного порядка ($\beta > 0$) [2].

Применяя дифференциальные операторы $D_{y1}^{1-\beta}$ к обеим частям равенства (18) с учетом

$$D_{y1}^{1-\beta}(1-y)^{1-2\beta}D_{y1}^{-\beta}(1-y)^{\beta-1}\tau_1^-(y) = (1-y)^{-\beta}D_{y1}^{1-2\beta}\tau_1^-(y),$$

$$D_{y1}^{1-\beta}D_{y1}^{\beta-1}(1-y)^{-\beta}\nu_1^-(y) = (1-y)^{-\beta}\nu_1^-(y),$$

получим функциональное соотношение между $\tau_1^-(y)$и $\nu_1^-(y)$ на I_1 из D_{11}^-:

$$\nu_1^-(y) = \frac{\gamma_3\Gamma(\beta)}{\gamma_4\Gamma(1-\beta)}D_{y1}^{1-2\beta}\tau_1^-(y) - \frac{(1-y)^\beta}{2\gamma_4\Gamma(1-\beta)}D_{y1}^{1-\beta}\widetilde{\psi_1}(y), \quad 0 < y < 1, \tag{19}$$

где $\tilde{\psi}_1(y) = \psi_1\left(\dfrac{y+1}{2}\right)$.

Решение первой краевой задачи с условиями (4),

$$\tau_1^+(y) = u(+0,y),\ \ 0 \le y \le 1, \quad \tau_2^{*+}(x) = u(x,+0),\ \ 0 \le x \le 1,$$

здесь

$$\tau_2^{*+}(x) = \begin{cases} \tau_2^+(x), 0 \le x \le r_0, \\ \varphi_1(x), r_0 \le x \le 1, \end{cases}, \tau_2^+(r_0) = \varphi_1(r_0) \tag{20}$$

для уравнения (1) в области D_0 единственно и представимо в виде [3, с. 4-13]:

$$u(x,y) = \int_0^1 G(x,\xi,y;\alpha_0)\tau_2^{*+}(\xi)\xi^{n_0}d\xi +$$

$$+y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(1)}(x,y-t;\alpha_0)\tau_1^+(t)t^{m_0}dt +$$

$$+y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(2)}(x,y-t;\alpha_0)\varphi_0^(t)t^{m_0}dt, \tag{21}$$

здесь

$$G^{(1)}(x,y;\alpha_0) = (1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}x - \int_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0)\left[1-(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}\xi\right]\xi^{n_0}d\xi,$$

$$G^{(2)}(x,y;\alpha_0) = (1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}x - \int_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0)(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}\xi^{n_0}d\xi,$$

а $G_1(x,\xi,y;\alpha_0)$ –функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области D_1 имеет вид

$$G_1(x,\xi,y;\alpha_0) = \sum_{k=o}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_k^2 y^{m_0+1}}{4(m_0+1)}}(1-\alpha_0)\sqrt{x}\xi\cdot$$

$$\cdot\frac{J_{1-\alpha_0}\left(\lambda_k(1-\alpha_0)\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}\right)J_{1-\alpha_0}\left(\lambda_k(1-\alpha_0)\left(\sqrt{\xi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}\right)}{J^2_{2-\alpha_0}\lambda_k},$$

$J_\nu(z)=\sum\limits_{k=o}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\left(\dfrac{z}{k}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$ – функция Бесселя первого рода, λ_k – положительные корни уравнения $J_{1-\alpha_0}(\lambda_k)=0, k=0,\,1,\,2,\,....$

Дифференцируя (21) по x и переходя к пределу при $x\to 0$, получим функциональное соотношение между $\tau_1^+(y)$и $\nu_1^+(y)$, принесенное на I_1 из области D_0:

$$\nu_1^+(y)=y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y z(y-t)\tau_1^+(t)t^{m_0}dt+F\left(y,\tau_2^+\right), \tag{22}$$

где

$$\nu_1^+(y)=\lim_{y\to+0}y^{-m_0}u_y, \tag{23}$$

$$F(y,\tau_2^+)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0)\tau_2^+(\xi)\xi^{n_0}d\xi\right)+ \tag{24}$$

$$+\lim_{x\to 0}\left(y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y G^{(2)}(x,y-t;\alpha_0)\varphi_0^(t)t^{m_0}dt\right),$$

$$z(y-t)\equiv(1-\alpha_0)^{2\alpha_0-1}\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}G^{(1)}(x,y-t;\alpha_0)=$$

$$=-(1-\alpha_0)-\sum_{k=o}^{\infty}e^{-\dfrac{\lambda_k^2\left(y^{m_0+1}-t^{m_0+1}\right)}{4(m_0+1)}}\frac{2^{2\alpha_0}\lambda_k^{-2\alpha_0}}{\Gamma^2(1-\alpha_0)J^2_{1-\alpha_0}(\lambda_k)}.$$

На основании свойств функции $J_\nu(z)$функция $z(y-t)$представима в виде [3, с. 12]:

$$z(y-t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\left[\frac{y^{m_0+1}}{m_0+1}-\frac{t^{m_0+1}}{m_0+1}\right]^{\alpha_0-1}+B(y-t),$$

где $B(y-t)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $y\geq t$.

Далее из уравнения $u_{xx}-x^{n_0}y^{-m_0}u_y=0$ при $y\to+0$ имеем

$$\tau_2^{''*+}(x)-x^{n_0}\nu_2^{*+}(x)=0, 0<x<1, \tag{25}$$

где

$$\nu_2^{*+}(x)=\begin{cases}\nu_2^+(x)=\lim\limits_{y\to+0}y^{-m_0}u_y(x,y), & 0<x<r_0,\\ \mu(x)=\lim\limits_{y\to+0}y^{-m_0}u_y(x,y), & r_0\leq x\leq 1.\end{cases} \tag{26}$$

В силу (20) и (26) из (25) получим

$$\tau_2^{''+}(x)-x^{n_0}\nu_2^+(x)=0,\ \ 0<x<r_0, \tag{27}$$

$$\tau_2^+(0)=\tau_1^-(0),\quad \tau_2^+(r_0)=\varphi_1(r_0), \tag{28}$$

и

$\varphi_1''(x) - x^{n_0}\mu(x) = 0$, т.е. $\mu(x) = x^{-n_0}\varphi_1''(x)$, $\quad r_0 < x < 1$.

Решая задачу (27), (28), получим функциональное соотношение между $\tau_2^+(x)$ и $\nu_2^+(x)$, принесенное на I_2 из области D_0.

$$\tau_2^{*+}(x) = \int\limits_0^{r_0} G(x,t)t^{n_0}\nu_2^+(t)dt + f_1(x), \quad 0 \le x \le r_0, \tag{29}$$

здесь

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{r_0}(x - r_0), & 0 \le t \le x, \\ \frac{x}{r_0}(t - r_0), & x \le t \le r_0, \end{cases} \tag{30}$$

$$f_1(x) = \frac{[\varphi_1(r_0) - \tau_1(0)]x + \tau_1(0)}{r_0}.$$

Далее, в силу замены $x \sim x^{\frac{1}{2q}}$, $\ t \sim t^{\frac{1}{2q}}$ получим функциональное соотношение между $\tilde{\tau}_2^+(x)$ и $\tilde{\nu}_2^+(x)$:

$$\tilde{\tau}_2^{*+}(x) = \int\limits_0^1 \tilde{G}(x,t)\tilde{\nu}_2^+(t)dt + \tilde{f}_1(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{31}$$

где $\tilde{G}(x,t) = \frac{1}{2q}t^{\frac{n_0+1}{n+2}-1}G(x^{\frac{1}{2q}}, t^{\frac{1}{2q}})$, $\tilde{f}_1(x) = f_1(x^{\frac{1}{2q}})$, $\tilde{\tau}_2^{*+}(x) = \tau_2^{*+}(x^{\frac{1}{2q}})$, $\tilde{\nu}_2^+(t) = \nu_2^+(t^{\frac{1}{2q}})$, $G(x,t)$ – определяется из (30).

Единственность решения задачи TF$_0$

Теорема 1. *Если выполнены условия (2) и $\lambda_j \ne 1$, $j = 1,2$, то решение задачи $\boldsymbol{TF}_0$ единственно.*

При доказательстве единственности решения задачи $\mathbf{TF}_0$ важную роль играет следующая лемма.

Лемма. *Если $\varphi_2(x) \equiv \psi_1(y) \equiv 0$, то решение $u(x,y)$ задачи $\boldsymbol{TF}_0$ своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{D}^*$ достигает только на $\overline{CB} \cup \overline{BB_0} \cup A \cup A_0$.*

Доказательство. Доказательство.В силу принципа экстремума для параболических уравнений [3], [4] решение $u(x,y)$ уравнения (1) достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{D}_0$ на отрезках $\overline{AA_0} \cup \overline{AB} \cup \overline{BB_0}$. Покажем, что решение $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в интервале $AC \cup AA_0$.

Предположим обратное, т.е. пусть в некоторой точке $(x_0, 0) \in AC$ функция $u(x,y)$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум). Тогда из (16) при $\varphi_2(x) \equiv 0$ имеем

$$\gamma_2\Gamma(1-\alpha)\nu_2^-(x_0) = \gamma_1\Gamma(\alpha)D_{x_0r_0}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x_0) \tag{32}$$

Отсюда в силу принципа экстремума для дифференциальных операторов дробного порядка [2] в точке положительного максимума (отрицательного минимума) строго положительно (отрицательно), т.е. $D_{x_0r_0}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x_0) > 0$, $\quad \left(D_{x_0r_0}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x_0) < 0\right)$.

Следовательно, в силу того, что $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и $\Gamma(\alpha) > 0$, $\Gamma(1-\alpha) > 0$ из (32), получим $\nu_2^-(x_0) > 0$, $\left(\nu_2^-(x_0) < 0\right)$. Отсюда из (3) с учётом (13) получим

$$\nu_2^+(x_0) > 0, \quad \left(\nu_2^+(x_0) < 0\right). \tag{33}$$

Так как в точке положительного максимума (отрицательного минимума) $\tau_2''^+(x_0) < 0$, $\left(\tau_2''^+(x_0) > 0\right)$, из (25) получим $\nu_2^+(x_0) < 0$, $\left(\nu_2^+(x_0) > 0\right)$, а это неравенство противоречит неравенству (33).

Таким образом, решение $u(x,y)$ уравнения (1) не может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума в интервале AC.

Точно также доказываем, что функция $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в интервале AA_0. Предположим обратное. Пусть, в некоторой точке $(0,y_0) \in AA_0$ функция $u(x,y)$ достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума). Тогда из (19) при $\psi_1(y) \equiv 0$, с учетом (2) и условия 3) задача $\mathbf{TF}_0$, заключаем, что $\nu_1^+(y_0) > 0$, $\left(\nu_1^+(y_0) < 0\right)$.

Это неравенство противоречит неравенству $\nu_1^+(y_0) < 0$, $\left(\nu_1^+(y_0) > 0\right)$[см [3],[4]]. Следовательно, решение $u(x,y)$ в интервале AA_0 не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума. Таким образом, $u(x,y)$ достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума только на $\overline{CB} \cup \overline{BB_0} \cup A \cup A_0$. **Лемма доказана.** □

Переходим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. В силу (8) и с учетом $(\lambda_j \neq 1, \ j = 1,2)$ в точке $A(0,0)$ имеем

$$u(0,0) = 0 \tag{34}$$

а в точке A_0, принимая во внимание (7) при $\varphi_1(x) \equiv 0$ получим

$$u(0,1) = 0. \tag{35}$$

Принимая во внимание (4) и (5) при $\varphi_0(y) \equiv 0$ и $\varphi_1(x) \equiv 0$ с учетом (34), (35) имеем

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D_0}. \tag{36}$$

В силу решения задачи Коши-Гурса с условиями

$$u|_{CE_2} = 0, \mathrm{u}|_{AC} = 0, \quad \left(u|_{A_0E_1} = 0, \ u|_{AA_0} = 0\right).$$

имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D_{11}} \cup \overline{D_{21}}$.

Следовательно,

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D^*}. \tag{37}$$

В силу (37) с учетом (8) (или (9)) имеем

$$u|_{AC_2} = 0, \quad u|_{AE_2} = 0, \quad (\text{или}\, u|_{AC_1} = 0, u|_{AE_1} = 0). \tag{38}$$

Отсюда и из решения задачи Коши-Гурса для уравнения (1) в области D_{j2} $(j = 1,2)$, с учетом (38) получим

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D_{j2}}. \tag{39}$$

В силу (37) и (39) имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Тем самым, решение задачи $\mathbf{TF}_0$ единственно.

Теорема 1 доказана □

Существование решения задачи TF_0

Теорема 2. *Если выполнены условия (2), (10), (11), (12), и $\lambda_j \neq 1$, то в области D решение задачи $\boldsymbol{TF}_0$ существует.*

Доказательство. Доказательство. Исключив $\tau_2^+(x)$из соотношений (16) и (28) с учетом (3) и условия 1) задачи $\mathbf{TF}_0$ получаем интегральное уравнение

$$\nu_2^+(x) = \int\limits_0^{r_0} K_1(x,s)\nu_2^+(s)ds + \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq r_0, \tag{40}$$

где

$$K_1(x,s) = K_{11}(x,s) + K_{12}(x,s) \tag{41}$$

$$K_{11}(x,s) = \chi_1 \frac{d}{dx} \int\limits_x^{r_0} \frac{s^{n_0+1}(t-x)^{2\alpha-1}(t-r_0)dt}{r_0}, \tag{42}$$

$$K_{12}(x,s) = \chi_1 \frac{d}{dx} \int\limits_x^{s} \frac{s^{n_0}(t-x)^{2\alpha-1}(s-r_0)tdt}{r_0} + \chi_1 \frac{d}{dx} \int\limits_s^{r_0} \frac{s^{n_0+1}(t-x)^{2\alpha-1}(t-r_0)dt}{r_0}, \tag{43}$$

$$\Phi(x) = \chi_1 \frac{d}{dx} \int\limits_x^{r_0} t(t-x)^{2\alpha-1} \left[\frac{(\varphi_1(r_0) - \tau_1^-(0))}{r_0} + \tau_1^-(0) \right] dt -$$

$$-\chi_2 (r_0 - x)^{\alpha} \frac{d}{dx} \int\limits_x^{r_0} (t-x)^{\alpha-1} \tilde{\varphi}_2(t)dt, \tag{44}$$

здесь

$$\chi_1 = \frac{2^{1-2\alpha}\gamma_1\Gamma(\alpha)}{\gamma_2\Gamma(2\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \quad \chi_2 = \frac{1}{2^{1+\alpha}\gamma_2\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.$$

В силу (2), (10), (11), (12) из (42), (43) и (44), соответственно, получим

$$|K_{11}(x,s)| \leq c_1(r_0-x)^{2\alpha}, \quad |K_{12}(x,s)| \leq c_2(s-x)^{2\alpha-1}, \quad |\Phi(x)| \leq c_3(r_0-x)^{2\alpha-1}. \tag{45}$$

Следовательно, из (41) имеем

$$|K_1(x,s)| \leq c_1(r_0-x)^{2\alpha} + c_2(s-x)^{2\alpha-1} \tag{46}$$

Таким образом, в силу (45) и (46) заключаем, что интегральное уравнение (40) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью, разрешимость которого следует из единственности решения задачи $\mathbf{TF}_0$. Решение уравнения (30) представимо в виде [5]:

$$\nu_2^+(x) = \int\limits_0^{r_0} R_1(x,t)\Phi(t)dt + \Phi(x), \tag{47}$$

и принадлежит классу: $\nu_2^-(x) \in C^2(0,1)$, причем $\nu_2^-(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\alpha$ при $x \to r_0$, а при $x \to 0$ ограничено, где $R_1(x,t)$- резольвента $K_1(x,t)$.

Подставляя (47) в (30) находим

$$\tau_2^+(x) = \int\limits_0^{r_0} t^{n_0} G(x,t)\Psi(t)dt + \Phi(x,\tau_1^-(0)), \quad 0 \le x \le r_0, \tag{48}$$

где

$$\Psi(t) = \Phi(t) + \int\limits_0^{r_0} \Phi(z)\, R_1(t,z)dz. \tag{49}$$

В силу (10), (11), (12), (44) и с учетом вида функции $G(x,t)$, $\Phi(x,\tau_1^-(0))$ из (48) следует, что

$$\tau_2^+(x) \in C\,[0,r_0] \cap C^2\,(0,r_0)\,. \tag{50}$$

Применяя дифференциальный оператор $D_{y1}^{\beta}(1-y)^{2\beta-1}$ к обеим частям равенства (18) получим

$$\tau_1^-(y) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)} D_{y1}^{2\beta-1}\nu_1^-(y) + \frac{(1-y)^{1-\beta}}{2\gamma_1\Gamma(\beta)} D_{y1}^{\beta}(1-y)^{2\beta-1}\tilde{\psi}(y), \quad 0 \le y \le 1. \tag{51}$$

Исключив $\tau_1^+(y)$ из соотношений (51), (22) с учетом условий 1), 3) задачи $\mathbf{TF}_0$ и (2) получаем интегральное уравнение

$$\nu_1^+(y) = \int\limits_0^1 K_2(y,z)\nu_1^+(z)dz + f(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{52}$$

где

$$K_2(y,z) = \begin{cases} K_{21}(y,z), & 0 \le z \le y, \\ K_{22}(y,z), & y \le z \le 1, \end{cases} \tag{53}$$

$$K_{21}(y,z) = \chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^z \left(y^{m_0+1} - t^{m_0+1}\right)^{\alpha_0-1} t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt +$$

$$+\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^z B(y-t)t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt, \tag{54}$$

$$K_{22}(y,z) = \chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y \left(y^{m_0+1} - t^{m_0+1}\right)^{\alpha_0-1} t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt +$$

$$+\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y B(y-t)t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt, \tag{55}$$

$$f(y) = \chi_4 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y \left(y^{m_0+1} - t^{m_0+1}\right)^{\alpha_0-1} t^{m_0}(1-t)^{1-\beta}\frac{d}{dt}\int\limits_t^1 (z-t)^{-\beta}(1-z)^{2\beta-1}\tilde{\psi}(z)dzdt + \tag{56}$$

$$+\chi_4 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y B(y-t)t^{m_0}(1-t)^{1-\beta}\frac{d}{dt}\int\limits_t^1 (z-t)^{-\beta}(1-z)^{2\beta-1}\tilde{\psi}(z)dzdt+F(y,\tau_2^+),$$

здесь $\chi_3=\dfrac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)\Gamma(2\beta)}$, $\chi_4=\dfrac{1}{2\gamma_1\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

Исследуем ядро и правую часть интегрального уравнения (52).

С этой целью, заменив t на $y\eta$ в (53) получим

$$K_{21}(y,z)=\chi_3 y^{-m_0}z^{\alpha_0(m_0+1)-2\beta-1}\frac{d}{d\sigma}K(\sigma)+\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^z B(y-t)t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt, \qquad (57)$$

где

$$K(\sigma)=\sigma^{\alpha_0(m_0+1)}\int\limits_0^\infty \eta^{m_0}f_1(\sigma\eta)f_2(\eta)d\eta, \qquad (58)$$

$$f_1(\sigma\eta)=(1-\sigma\eta)_+^{-2\beta},\quad f_2(\eta)=(1-\eta^{m_0+1})_+^{\alpha_0-1},\qquad \sigma=\frac{y}{z},\qquad z_+^l=\begin{cases} z^l, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

Воспользовавшись формулами [6, с. 630(6), с. 631(4)], имеем

$$f_1(s)\leftrightarrow\Gamma(1-2\beta)\Gamma\left[\begin{array}{c} s\\ s+1-2\beta\end{array}\right],\qquad s<0, \qquad (59)$$

$$f_2(s)\leftrightarrow\frac{1}{m_0+1}\Gamma(\alpha_0)\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s}{m_0+1}\\ \frac{s}{m_0+1}+\alpha_0\end{array}\right],\qquad s<0, \qquad (60)$$

Далее, применив формулу [7, с. 21(1.88)]:

$$x^\alpha\int\limits_0^\infty \xi^\beta f_1(x\xi)f_2(\xi)d\xi\leftrightarrow f_1^*(s+\alpha)f_2^*(1-s-\alpha+\beta),$$

в (59) с учетом (59), (60) получим

$$K(\sigma)\leftrightarrow\frac{1}{m_0+1}\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)\Gamma\left[\begin{array}{cc} \alpha_0(m_0+1)+s, & \frac{1}{m_0+1}(1+m_0-s)-\alpha_0\\ \alpha_0(m_0+1)-2\beta+1+s, & \frac{1}{m_0+1}(1+m_0-s)\end{array}\right],$$

$$-\alpha_0<\frac{s}{1+m_0}<1-\alpha_0.$$

Отсюда учитывая [6. стр.628 (8.3.1)], находим

$$K(\sigma)\leftrightarrow\frac{1}{m_0+1}\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)H_{22}^{02}\left[\sigma\left|\begin{array}{cc} (1-\alpha_0(m_0+1),\,-1), & \left(\alpha_0,\,\frac{1}{m_0+1}\right)\\ (2\beta-\alpha_0(m_0+1),-1), & \left(0,\,\frac{1}{m_0+1}\right)\end{array}\right.\right], \qquad (61)$$

где H_{22}^{02} – функция Фокса [6].

Подставляя (61) в (57) и используя формулу [6. стр.629 (22)], получим

$$\frac{dK(\sigma)}{d\sigma}=\frac{(m_0+1)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)}\cdot\frac{1}{\sigma}H_{33}^{03}\left[\sigma\left|\begin{array}{l} (0,1),(1-\alpha_0(m_0+1),-1),\left(\alpha_0,\frac{1}{m_0+1}\right)\\ (2\beta-\alpha_0(m_0+1),-1),\left(0,\frac{1}{m_0+1}\right),(1,1)\end{array}\right.\right]. \qquad (62)$$

Следовательно, в силу формулы [6. стр.629 (22)]с учетом (61) из (57) имеем

$$K_{21}(y,z)=\frac{\chi_3\left(\frac{1}{y}\right)^{m_0+1}z^{\alpha_0(m_0+1)-2\beta}\ k^{2\beta-\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)}G_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{m}\tilde{n}}\left(\sigma^k\left|\begin{array}{l}\Delta(k_1,a_1),\ \Delta(k_2,a_2),\ \Delta(k_3,a_3),\\ \Delta(l_1,b_1),\ \Delta(l_2,b_2),\ \Delta(l_3,b_3),\end{array}\right.\right)+$$

$$+\chi_3y^{-m_0}z^{m_0+1-2\beta}\int\limits_0^1 B'(y-z\mu)\mu^{m_0}(1-\mu)^{-2\beta}d\mu, \tag{63}$$

где $G_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{m}\tilde{n}}$ – функция Мейера [6], а k – знаменатель числа $\frac{1}{m_0+1}$, $\tilde{n}=\tilde{p}=\tilde{q}=2k+2k\cdot\frac{1}{m_0+1},\tilde{m}=0$.

$$\Delta(k_1,a_1)=0,\frac{1}{k},.......,\frac{k-1}{k},$$

$$\Delta(k_2,a_2)=\frac{1-\alpha_0(m_0+1)}{\frac{1}{m_0+1}k},\quad\frac{2-\alpha_0(m_0+1)}{\frac{1}{m_0+1}k},...........,\frac{1-\alpha_0(m_0+1)+k-1}{\frac{1}{m_0+1}k},$$

$$\Delta(k_3,a_3)=\frac{\alpha_0}{k},\quad\frac{\alpha_0+1}{k},...........,\frac{\alpha_0+k-1}{k},$$

$$\Delta(l_1,b_1)=\frac{2\beta-\alpha_0(m_0+1)}{\frac{1}{m_0+1}k},\quad\frac{2\beta-\alpha_0(m_0+1)+1}{\frac{1}{m_0+1}k},...........,\frac{2\beta-\alpha_0(m_0+1)+k-1}{\frac{1}{m_0+1}k},$$

$$\Delta(l_2,b_2)=0,\frac{1}{k},.......,\frac{k-1}{k},,\quad\Delta(l_3,b_3)=\frac{1}{k},\ \frac{2}{k},.........,\frac{1+k-1}{k}.$$

Используя оценки функция Мейера [6, с. 629(32)], [7, с. 19-20(1.80)], с учетом $\tilde{m}+\tilde{n}-\tilde{q}=0$ (у нас $\tilde{m}=0$) и $\psi_{\tilde{q}}=\alpha_0-2\beta-1<0$, из (63) имеем

$$|K_{21}(y,z)|\leq c_4\left(y^k-z^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1},\quad 0\leq z\leq y. \tag{64}$$

Точно так же оценивая $K_{22}(y,z)$, имеем

$$|K_{22}(y,z)|\leq c_5\left(z^k-y^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1},\quad y\leq z\leq 1. \tag{65}$$

Принимая во внимание (63) и (64), с учетом (55) и (56) из (53) имеем

$$|K_2(y,z)|\leq\left\{\begin{array}{l}c_4\left(y^k-z^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1},\ 0\leq z\leq y,\\ c_5\left(z^k-y^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1},\ y\leq z\leq 1.\end{array}\right.$$

Следовательно,

$$|K_2(y,z)|\leq const\left|y^k-z^k\right|^{\alpha_0-2\beta-1}. \tag{66}$$

В силу (11), (51) из (26) следует, что $\bar{F}(y,\tau_2^+)\in C^2(0,1)$ причем функция $\bar{F}(y,\tau_2^+)$ может иметь особенность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y\to 0$, а при $y\to 1$ ограничена [4].

Отсюда учитывая (2), (11) из (56) имеем

$$|f(y)|\leq c_6y^{(m_0+1)(\alpha_0-1)}. \tag{67}$$

Следовательно, $f(y) \in C^2(0,1)$, причем $f(y)$ может иметь особенность порядка меньше $(1-\alpha_0)(m_0+1)$ при $y \to 0$, а при $y \to 1$ ограничена.

Таким образом, из (65) с учетом (2) заключаем, что интегральное уравнение (52) является интегральным уравнением Фредгольма 2-рода со слабой особенностью.

Безусловная и однозначная разрешимость интегрального уравнения (52) (в силу эквивалентности его задаче $\mathbf{TF}_0$) следует из единственности решения задачи $\mathbf{TF}_0$ [5].

После нахождения $\nu_1^{\pm}(y)$ $\left[\nu_2^{\pm}(x)\right]$ из (52) [(40)] находим $\tau_1^{\pm}(y)$ $\left[\tau_2^{\pm}(x)\right]$ из (51) [30] в классе $\tau_1^{\pm}(y) \in C(\bar{I}_1)C^2(I_1)$ $\left[\tau_2^{\pm}(x) \in C(\bar{I}_2)C^2(I_2)\right]$.

Таким образом, решение задачи $\mathbf{TF}_0$ в области D_0 находится как решение первой краевой задачи (21), а в областях D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}—как решение задачи Коши для уравнения (1). Следовательно, задача $\mathbf{TF}_0$ однозначно разрешима. **Теорема 2 доказана.** □

Библиографический список

1. Исломов Б., Очилова Н.К. О краевой задаче для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения // Узбекский математический журнал. 2005. № 3. С. 42-53.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. Наука. 1985. 304 с.

3. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа сменяющимся направлением времени. Новосибирск. 1978. 53 с.

4. Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения: дис. канд. физ.-мат. наук. Ташкент: Им. АН РУз. 1995. 120 с.

5. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.: Наука. 1947. 304 с.

6. Прудников А.П., Брычков Ю.А, Марычев О.И. Интегралы и ряды. Доп. главы. - М.: Наука. 1986. 800 с.

7. Салахитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линями вырождения. Ташкент. МУМТОЗ СЎЗ. 2009. 264 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 03.05.2014