Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 1 (8). С. 7-13. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. Мамажонов[1], Х.М. Шерматова[2], Х. Мукадасов[1]

[1] Кокандский государственный педагогический университет им. Мукини, 113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37
[2] Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19
E-mail: fizmat@fdu.com

Настоящая работа посвящена изучению методики исследования некоторых краевых задач для одного класса параболо-гиперболических уравнений третьего порядка в вогнутой шестиугольной области, которые воспользуется при изучении задач математической физики в магистратуре.

Ключевые слова: краевые условия, условие склеивания, интегральное уравнение Вольтерра второго рода

MATHEMATICS

MSC 35M13

FORMULATION AND METHOD OF SOLVING CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF EQUATIONS THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

M. Mamajonov[1], H.M. Shermatova[2], H. Mukadasov[1]

[1] Kokand State Pedagogical Institute by Mukini, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira Temura st. 37
[2] Fergana State University, 150100, Uzbekistan, Fergana c., Murabbiylar st., 19
E-mail: fizmat@fdu.com

This paper studies the methods of investigation of some boundary value problems for a class of parabolic-hyperbolic equations of the third order in the hexagonal concave areas that take advantage of the study of problems of mathematical physics in the magistracy.

Key words:operator boundary conditions, the condition of bonding, Volterra integral equation of the second kind

Введение

Развитие уравнений в частных производных обусловлено широких кругом прикладных задач в физике, экономике, биологии и в других науках. В рамках теории уравнений математической физики как дисциплины, читаемой в магистратуре, большой интерес представляют уравнения смешанного типа. Такие уравнения могут быть использованы при описании различных физических процессов от пространственных околозвуковых течений идеального политропного газа, гидродинамических течений с переходом через скорость звука до бесконечно малых изгибаний поверхностей.

Уравнения смешанного типа рассматриваются в разных областях с границей (линией вырождения). На этой границе задаются условия сопряжения или склеивания.

Впервые на необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой - гиперболическое, было указано в 1959 г. И.М. Гельфандом [1]. Он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Затем Г.М. Стручина [2], Я.С. Уфлянд [3], Л.А. Золина [4] показали другие применения этих задач. Так, например, Я.С. Уфлянд задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки.

Математический аппарат уравнений параболо-гиперболического типа описан в работах [5]-[6]. В настоящей работе предложена методика изучения краевых задач для уравнения параболо-гиперболического типа.

Постановка задачи

Рассмотрим в области D уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

где $a,b,c\in R$, $Lu\equiv\left\{\begin{array}{l} L_1u\equiv u_{xx}-u_y\ \ D_1, \\ L_iu\equiv u_{xx}-u_{yy}\ \ D_i\ \ (i=2,3), \end{array}\right.$

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup J_1\cup J_2,\quad D_1=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<1,\ 0<y\leq 1\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<1,\ x-1<y<0\right\}, AB=\left\{(x,y)\in R^2:\ y=0,\ 0<x<1\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<y<1,\ y-1<x<0\right\},\quad AA_0=\left\{(x,y)\in R^2:\ x=0,\ 0<y<1\right\},$$

то есть $D-$ вогнутая шестиугольная область с вершинами в точках

$$A(0,0), C(0,-1), B(1,0), B_0(1,1), A_0(0,1), D(-1,0).$$

Области D_2 и D_3 разделим по две части каждой с помощью отрезка

$$E_1E_2=\left\{(x,y)\in R^2:\ y=-x,\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}.$$

Тогда эти области можно записать в виде

$$D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup AE_1, D_3 = D_{31} \cup D_{32} \cup AE_2$$

где

$$D_{21} = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ -\frac{1}{2} < y < 0,\ -y < x < y+1 \right\},$$

$$D_{22} = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ 0 < x < \frac{1}{2},\ x-1 < y < -x \right\},$$

$$D_{31} = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ 0 < y < \frac{1}{2},\ y-1 < x < -y \right\},$$

$$AE_1 = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ 0 < x < \frac{1}{2},\ y = -x \right\},$$

$$D_{32} = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ -\frac{1}{2} < x < 0,\ -x < y < x+1 \right\},$$

$$AE_2 = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ 0 < y < \frac{1}{2},\ x = -y \right\},$$

, а $E_1\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

Теперь переходим к постановке краевой задачи для уравнения (1). Перед тем, как приступить к постановке задачи запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые воспользуются при постановке задачи.

Краевые условия:

$$u(1,y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u_x(1,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u|_{BC} = \psi_1(x), 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

$$u|_{BE_1} = \psi_1(x), \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u(x,0) = f_1(x), -1 \le x \le 0, \tag{6}$$

$$u_y(x,0) = f_2(x), -1 \le x \le 0, \tag{7}$$

$$u_{yy}(x,0) = f_3(x), -1 \le x \le 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_2(x), 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_0D} = \psi_4(y), 0 \le y \le 1, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{E_2D} = \psi_4(y), 0 \le y \le 1, \tag{11}$$

$$u(0,y) = \varphi_3(y), -1 \leq y \leq 0, \tag{12}$$

$$u_x(0,y) = \varphi_4(y), -1 \leq y \leq 0, \tag{13}$$

$$u_{xx}(0,y) = \varphi_5(y), -\frac{b}{a} \leq y \leq 0, \tag{14}$$

$$u_{xx}(0,y) = \varphi_5(y), -1 \leq y \leq 0. \tag{15}$$

Условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,\ -0) = u(x,+0), 0 \leq x \leq 1, \tag{16}$$

$$u_y(x,\ -0) = u_y(x,\ +0), 0 \leq x \leq 1, \tag{17}$$

$$u_{yy}(x,\ -0) = u_{yy}(x,\ +0), 0 \leq x \leq 1, \tag{18}$$

$$u(-0,\ y) = u(+0,\ y), 0 \leq y \leq 1, \tag{19}$$

$$u_x(-0,\ y) = u_x(+0,y), 0 \leq y \leq 1, \tag{20}$$

$$u_{xx}(-0,y) = u_{xx}(+0,y), 0 \leq y \leq 1, \tag{21}$$

где φ_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$, ψ_j $(j = 1,2,4)$, f_k $(k = 1,2,3)$ – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямым $x - y = 1$ и $x - y = -1$.

В зависимости от коэффициентов a и b, т.е. от углового коэффициента $\gamma = \frac{b}{a}$ характеристик $bx - ay = const$ оператора $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ уравнения (1) ставятся различные краевые задачи. Приступим к постановке краевой задачи для уравнения (1).

Задача *Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

Таблица

Классификация краевых задач

Случаи	Краевые условия	Условия склеивания
1^o. $a = 0, b \neq 0$ $(\gamma = \infty)$	(2), (4), (6), (7), (9), (10)	(16) – (20)
2^o. $a \neq 0, b = 0$ $(\gamma = 0)$	(2), (4), (6), (7), (9), (10)	(16), (17), (19) – 18)
3^o. $0 < \gamma < 1$	(2), (5), (6) – (10), (12), (14)	(16) – (21)
4^o. $\gamma = 1$	(2), (6) – (8), (12), (13), (15)	(16) – (21)
5^o. $1 < \gamma < +\infty$	(2), (5), (6) – (9), (12), (15)	(16) – (21)
6^o. $-\infty < \gamma < -1$	(2) – (4), (6), (7), (9), (10) или (2) – (4), (6), (7), (9), (11)	(16) – (20) или (16) – (21)
7^o. $-1 \leq \gamma < 0$	(2) – (4), (6), (7), (9), (10)	(16) – (20)

1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей D_i $(i=1,2,3)$;

3) удовлетворяет следующим краевым условиям и непрерывным условиям склеивания на линии изменения типа:

Мы здесь будем указать идею решения поставленной задачи лишь в случае 1^o. В этом случае уравнение (1) имеет вид:

$$\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0.$$

Это уравнение можно привести к уравнению второго порядка с неизвестной правой частью следующим образом: введя обозначение $Lu=v$, получим уравнение $b\dfrac{\partial v}{\partial y}+cv=0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид: $v=\omega(x)\exp\left(-\dfrac{c}{b}y\right)$. Тогда получим $Lu_i=\omega_i(x)\exp\left(-\dfrac{c}{b}y\right)$, где введено обозначение:

$$u(x,\,y)=u_i(x,\,y)\,,\ (x,\,y)\in D_i\ \ (i=1,\,2,\,3)\,. \tag{22}$$

Последнее уравнение можно записать в виде:

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(x)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \tag{23}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(x)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)\ (i=2,\,3)\,, \tag{24}$$

где $\omega_i(x)$ $(i=1,\,2,\,3)$ – произвольные достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

В уравнении (24) $(i=2)$ введем обозначения:

$$u_2(x,\,y)=u_{2k}(x,\,y)\,,\ \omega_2(x)=\omega_{2k}(x)\quad (x,\,y)\in D_{2k}\ \ (k=1,\,2)\,.$$

Тогда уравнение (24) имеет вид:

$$u_{2kxx}-u_{2kyy}=\omega_{2k}(x)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right)\ (k=1,\,2)\,. \tag{25}$$

После обозначения (22) условия склеивания (16) - (21) переходят к виду

$$u_2(x,\,0)=u_1(x,\,+0)=\tau_1(x)\,,0\le x\le 1, \tag{26}$$

$$u_{2y}(x,\,0)=u_{1y}(x,\,0)=\nu_1(x)\,,0\le x\le 1, \tag{27}$$

$$u_{2yy}(x,\,0)=u_{1yy}(x,\,0)=\mu_1(x)\,,0\le x\le 1, \tag{28}$$

$$u_3(0,\,y)=u_1(0,\,y)=\tau_2(y)\,,0\le y\le 1, \tag{29}$$

$$u_{3x}(0,\,y)=u_{1x}(0,y)=\nu_2(y)\,,0\le y\le 1, \tag{30}$$

$$u_{3xx}(0,y)=u_{3xx}(0,y)=\mu_2(y)\,,0\leq y\leq 1, \tag{31}$$

Здесь $\tau_1,\nu_1,\tau_2,\nu_2,\mu_1,\mu_2$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению, кроме того выполняются следующие условия согласования: $\tau_1(0)=\tau_2(0)=f_1(0)\,,\nu_1(0)=\tau_2'(0)=f_2(0)\,,\quad \tau_1(1)=\varphi_1(0)$.

Сначала поставленную задачу будем исследовать в области D_2.

Записывая решение уравнения (25) $(k=1)$, удовлетворяющее условиям (26), (27) и подставляя это решение в (9), находим неизвестную функцию $\omega_{21}(x)$ в промежутке $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$.

Затем введя обозначения:

$$u_{22}(0,y)=\tau_3(y)\,,\; u_{22x}(0,y)=\nu_3(y)\;\;(-1\leq y\leq 0)\,,$$

где $\tau_3(y)\,,\nu_3(y)$ – неизвестные пока функции, подлежащие определению и записывая решение уравнения (25) $(k=2)$, удовлетворяющее этим условиям и подставляя это решение в условие (9), находим неизвестную функцию $\omega_{22}(x)$ при $0\leq x\leq \frac{1}{2}$. Используем условие:

$$\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\bigg|_{AE_1}=\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\bigg|_{AE_1},$$

находим неизвестную функцию $\omega_{21}(x)$ в промежутке $0\leq x\leq \frac{1}{2}$.

Подставляя решение уравнения (25) при $k=1$ в (4) после некоторых выкладок, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha(x)\,,\; 0\leq x\leq 1, \tag{32}$$

где $\alpha(x)$ — известная функция.

После этого записывая уравнение (1) в области D_1 в виде

$$bu_{1xxy}+cu_{1xx}-bu_{1yy}-cu_{1y}=0$$

и переходя в этом уравнении к пределу, при $y\to 0$ с учетом условий (26)-(28), имеем второе соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$b\nu_1''(x)+c\tau_1''(x)-b\mu_1(x)-c\nu_1(x)=0. \tag{33}$$

Теперь переходя в уравнении (25) $(k=1)$ к пределу в промежутке $y\to 0$, получим третье соотношение между этими неизвестными функциями:

$$\tau_1''(x)-\mu_1(x)=\omega_{21}(x)\,. \tag{34}$$

Исключая из системы (32), (33), (34) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$ после некоторых выкладок, мы приходим к дифференциальному уравнению относительно $\tau_1(x)$. Решая это уравнение при условиях $\tau_1(0)=f_1(0)\,,\;\tau_1'(0)=f_1'(0)\,,\;\tau_1(1)=\psi_1(1)\,,$ мы находим неизвестную функцию $\tau_1(x)$ и тем самым – функции $\nu_1(x)$, $u_{21}(x,y)$ в D_{21}.

Воспользуясь условиям $u_{22}(x,-x)=u_{21}(x,-x)$ и (4), мы получим две соотношения между неизвестными функциями $\tau_3(x)$ и $\nu_3(x)$, из которых находим эти функции.

Тем самым – и функцию $u_{22}(x,y)$ в D_{22}. Таким образом, мы нашли функцию $u_2(x,y)$ в области D_2 единственным образом.

Переходим в область D_3. Аналогично, как и в области D_2, определяются неизвестные функции $\omega_{31}(x)$ и $\omega_{32}(x)$.

В области D_3 из формулы решения при $x \to 0$ мы получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$.

Переходим в область D_1. Запишем решение уравнения (23), удовлетворяющее условиям (2), (26), (29). Дифференцируем это решение по x. Затем в полученном равенстве полагаем $x \to 0$, тогда в силу условия (30), получим второе соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$. Исключаем из полученных двух соотношений функцию $\nu_2(y)$, тогда мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функции $\tau_2'(y)$. Ядро этого уравнения имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Поэтому это уравнение допускает единственное решение из класса непрерывных функций. Решая это уравнение, находим функцию $\tau_2'(y)$ и тем самым – функции $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$, $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$.

Заключение

Таким образом, мы нашли единственное решение поставленной задачи 1 в случае 1^o. Аналогично исследуются остальные случаи. При решении поставленной задачи 1 применяются методы дифференциальных и интегральных уравнений.

В работах [5]-[6] рассмотрен ряд краевых задач для таких уравнений.

Библиографический список

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. XIV. Вып. 3 (87). С. 3-19.
2. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженер.-физ. журн. 1961. Т. 4. № 11. С. 99-104.
3. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89-92.
4. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т.6. № 6. С. 991-1001.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
6. Джураев Т.Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. №1. С. 37-50.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 07.04.2014