

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 533.12

### ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

**Федотов В.П., Горшков А.В.**

Институт Машиноведения УрО РАН, 620049, г. Екатеринбург,  
ул. Комсомольская, 34.

E-mail: alex.gorshkov@usu.ru

Рассматривается задача теории потенциала, описываемая уравнением Лапласа  $\Delta u = 0$ . В работе предложен алгоритм решения задачи потенциала, основанный на методе граничных элементов. Рассмотрены примеры решения задачи Дирихле для круговой области, для куба и решения задачи для куба со смешанными граничными условиями. Проводится сравнение решений, полученными численно-аналитическим методом граничных элементов с аналитическими решениями и решениями, полученными численным интегрированием по граничным элементам.

*Ключевые слова: потенциал, граничные элементы, аналитические вычисления*

© Федотов В.П., Горшков А.В., 2012

INFORMATION AND COMPUTATION TECHNOLOGIES  
MSC 65R10

### APPLY MODIFIED METHOD OF THE BOUNDARY ELEMENTS TO THEORY POTENTIAL PROBLEMS

**Fedotov V.P., Gorshkov A.V.**

The Russian Academy of Sciences Ural Branch Institute of Engineering Sciences,  
Ekaterinburg 620049, Komsomolskay str., 34, Russia

E-mail: alex.gorshkov@usu.ru

An algorithm for solving the potential problem, based on the boundary element method, is proposed. Some example of the Dirichlet problem for the circle and the cube are consider. The numerical-analytical solution of the boundary element method were compared with the analytical solution and the numerical solution of the boundary element method.

*Key words: potential problem, boundary element, analytic calculation*

© Fedotov V.P., Gorshkov A.V., 2012

## Введение

Многие физические задачи: гидравлики, электростатики, установившейся теплопроводности и фильтрации, равновесной диффузии сводятся к решению задачи потенциала. Как правило, они решаются численно с помощью сеточных методов, которые приводят к достаточно трудоемкому и не всегда корректному счету. Поэтому актуально повышение скорости и точности решения. Одно из направлений повышения скорости вычислений – уменьшение размерности системы разрешающих уравнений. Использование метода граничных элементов позволяет на единицу понизить порядок системы. Другой путь повышения скорости и точности – максимально возможное использование аналитических вычислений. В известных работах [1, 2, 4] интегралы по граничным элементам берутся численно, с использованием квадратурных формул Гаусса. В трехмерном случае это плоские элементы, как правило, треугольные. Поэтому другой путь повышения скорости и точности – максимально возможное использование аналитических вычислений. Это позволяет получить точные значения интегралов по элементам и их предельные выражения. Такой подход использовался для решения плоских параболических задач [5, 6] и плоских задач теории упругости [7, 8].

## Основное уравнение

Рассматривается задача теории потенциала, описываемая уравнением Лапласа:

$$\nabla_j^2 u = 0 \quad (1)$$

в области  $V$  с поверхностью  $\Gamma$ . На поверхности заданы граничные условия:

$$\text{при } x \in \Gamma_1, \quad u = \bar{u}(x); \quad (2)$$

$$\text{при } x \in \Gamma_2, \quad q = \bar{q}(x), \quad (3)$$

где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – части поверхности,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ , чертой отмечены заданные функции,  $q = \partial u / \partial \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности,  $n_j$  его компоненты. Для решения используется известный подход взвешенных невязок [1]:

$$\int_V \nabla_j^2 u(x) U^*(\xi, x) dV_x + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) Q^*(\xi, x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) U^*(\xi, x) d\Gamma_x = 0. \quad (4)$$

Здесь  $U^*(\xi, x)$  – весовая функция,  $Q^*(\xi, x) = \partial U^*(\xi, x) / \partial \vec{n} = n_j \nabla_j U^*$ . Преобразуем первое слагаемое в (4), взяв интеграл дважды по частям. Индекс  $x$  в  $dV_x$  и  $d\Gamma_x$  показывает, что интеграл берется по переменным  $x$ :

$$\int_V \nabla_j^2 u(x) U^*(\xi, x) dV_x = \int_V (\nabla_j u(x) U^*(\xi, x))_{,j} dV_x - \int_V \nabla_j u(x) \nabla_j U^*(\xi, x) dV_x.$$

К первому слагаемому правой части применим формулу Гаусса – Остроградского, а интеграл по объему снова проинтегрируем по частям:

$$\int_{\Gamma} \nabla_j u(x) n_j U^*(\xi, x) dV_x - \int_V \nabla_j u(x) \nabla_j U^*(\xi, x) dV_x =$$

$$= \int_{\Gamma} q(x)U^*(\xi, x)d\Gamma_x - \int_V (u(x)\nabla_j U^*(\xi, x))_{,j} dV_x + \int_V u(x)\nabla_j^2 U^*(\xi, x)dV_x.$$

Применяя ко второму слагаемому формулу Гаусса – Остроградского получим выражение:

$$\int_{\Gamma} q(x)U^*(\xi, x)d\Gamma_x - \int_{\Gamma} u(x)Q^*(\xi, x)d\Gamma_x + \int_V u(x)\nabla_j^2 U^*(\xi, x)dV_x.$$

После подстановки в (4) получим:

$$\begin{aligned} & \int_V u(x)\nabla_j^2 U^*(\xi, x)dV_x - \int_{\Gamma_1} q(x)U^*(\xi, x)d\Gamma_x \\ & + \int_{\Gamma_2} \bar{q}(x)U^*(\xi, x)d\Gamma_x + \int_{\Gamma_2} \bar{u}(x)Q^*(\xi, x)d\Gamma_x - \int_{\Gamma_1} u(x)Q^*(\xi, x)d\Gamma_x = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выберем весовую функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla_j^2 U^* = -2\alpha\pi\delta(\xi, x),$$

где  $\delta(\xi, x)$  – дельта-функция Дирака, для плоских задач  $\alpha = 1$ , для трехмерных  $\alpha = 2$ . Решение этого уравнения в случае трехмерных задач имеет вид:

$$U^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi r(\xi, x)},$$

где  $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$  в плоском случае

$$U^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi, x),$$

$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}$ . В результате подстановки в (5) получим граничное интегральное уравнение [1]:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} Q^*(\xi, x)u(x)d\Gamma_x - \int_{\Gamma} U^*(\xi, x)q(x)d\Gamma_x. \quad (6)$$

Здесь интегралы берутся по всей поверхности, включая области, где граничные условия известны и неизвестны.

Согласно методу граничных элементов, разобьем границу на элементов. Удобнее использовать треугольные элементы, а в плоском случае отрезки прямых. Для аппроксимации неизвестных функций выберем наиболее простой вариант – потенциал  $u(x)$  и поток  $q(x)$  на элементе постоянны. Будем считать, что эти значения соответствуют узлу  $\xi_k$  элемента и равны  $u_k$  и  $q_k$  соответственно. В качестве узла  $\xi_k$  выберем середину элемента, в трехмерном случае точку пересечения медиан треугольника, а в плоском – середину отрезка. Положим, что поверхность  $\Gamma_1$  содержит  $N$  элементов, которые обозначим  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(N)}$  а поверхность  $\Gamma_2$  –  $M$  элементов, которые обозначим  $\Gamma^{(N+1)}, \Gamma^{(N+2)}, \dots, \Gamma^{(N+M)}$ ,  $N + M = n$ . Для узла  $\xi_p$ , лежащего на элементе  $\Gamma^{(p)}$  запишем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_p = \sum_{r=1}^N \left( q_r \int_{\Gamma^{(r)}} u^*(\xi_p, x)d\Gamma_x - \bar{u}_r \int_{\Gamma^{(r)}} q^*(\xi_p, x)d\Gamma_x \right) + \\ & + \sum_{r=N+1}^{N+M} \left( \bar{q}_r \int_{\Gamma^{(r)}} u^*(\xi_p, x)d\Gamma_x - u_r \int_{\Gamma^{(r)}} q^*(\xi_p, x)d\Gamma_x \right), p = 1, 2, \dots, N + M \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (6) свелось к системе линейных уравнений (7).

Для решения задачи нужно вычислить интегралы:

$$U_{mn} = \int_{\Gamma_n} u^*(\xi_m, x) d\Gamma_x, Q_{mn} = \int_{\Gamma_n} q^*(\xi_m, x) d\Gamma_x. \quad (8)$$

Интегралы (8) вычислены аналитически. В плоском случае эти интегралы представляют собой линейные комбинации выражений:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \ln(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad Q_2 = \ln((\xi_1 - L)^2 + \xi_2^2), \\ Q_3 &= \arctan\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right), \quad Q_4 = \arctan\left(\frac{\xi_1 - L}{\xi_2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $L$  – длина отрезка. Как видно из приведенных выражений, интегралы зависят от логарифмов расстояний от точки  $\xi$  до концов элемента и от углов между элементом и направлением на точку  $\xi$ .

### Пример 1

Стационарная тепловая задача для круговой области при заданных на границе значениях температуры (задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге).

Рассмотрим задачу определения температуры в круговой области с радиусом  $R$  при заданных на границе значениях температуры:

$$\begin{aligned} k\Delta u &= 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R, \\ u &= 1 + \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi + \cos 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r = R. \end{aligned}$$

Задача имеет аналитическое решение

$$u = 1 + r \sin \varphi + \frac{r^3}{2} \sin 3\varphi + r^4 \cos 4\varphi.$$

Для сравнения найдем приближенное решение с помощью модифицированного метода граничных элементов. Граница области – окружность радиуса  $R = 1$  – приближается ломаной, состоящей из  $n$  отрезков прямой одинаковой длины. Температура и поток полагаются постоянными на каждом отрезке. Чем больше  $n$ , тем точнее будет приближение окружности ломанной. Результаты расчетов. На рис. 1 представлены графики решений при различном числе узлов. Как видно из результатов решений наблюдается очень быстрая численная сходимость метода, что объясняется аналитическими вычислениями в основе общей процедуры счета, причем, уже при разбиении на 32 граничных элемента отличия от аналитического решения практически отсутствуют, что позволяет говорить о снижении порядка разрешающей системы алгебраических уравнений.

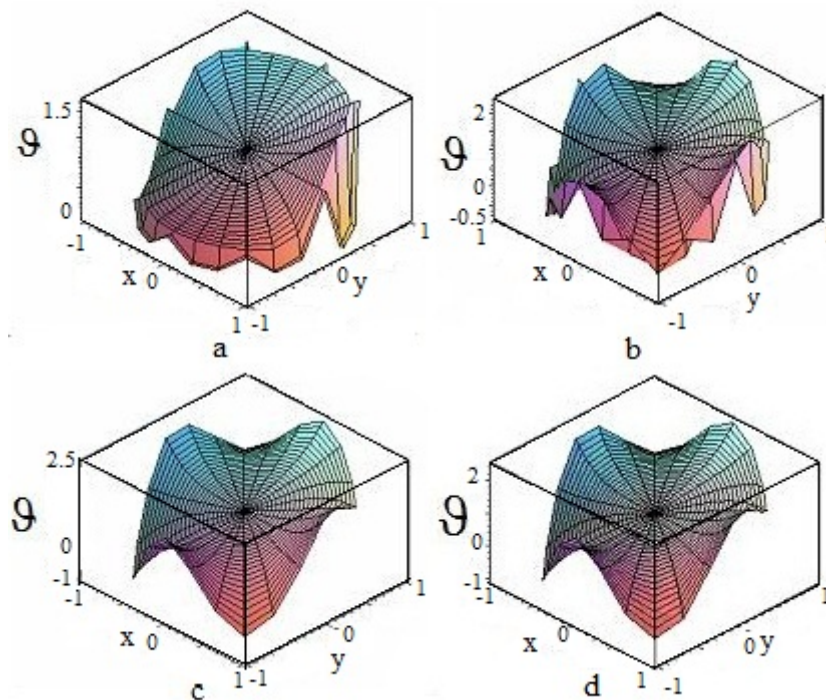


Рис. 1. Графики решений при различном числе узлов:  $n = 8$  (a);  $n = 16$  (b);  $n = 32$  (c); для сравнения график аналитического решения (d)

### Трехмерный случай

Для вычисления интегралов в трехмерном случае вершины элемента нумеруются так, чтобы обход со стороны внешней нормали поверхности был против часовой стрелки. На каждом элементе вводится локальная система координат  $0x_1x_2x_3$ . Систему выбираем так, что начало  $o$  совпадает с третьей вершиной элемента. Ось  $ox_3$  параллельна внешней нормали поверхности и направлена в ту же сторону. Ось  $ox_2$  параллельна стороне, противоположной вершине треугольника. Ось  $ox_1$ , соответственно перпендикулярна этой стороне (см. рис. 2). Координаты вершин элемента в

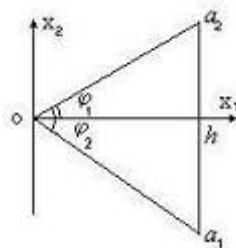


Рис. 2. Локальная система координат элемента

локальной системе координат равны  $(0,0)$ ,  $(h, k_1h)$ ,  $(h, k_2h)$ , где  $k_1 = \tan \varphi_1$ ,  $k_2 = \tan \varphi_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – углы, которые образуют стороны  $oa_1$  и  $oa_2$  элемента с осью. Такой выбор системы координат обеспечивает определенную симметрию интегрируемых выражений. Координаты точки наблюдения в локальной системе координат элемента  $m$

обозначим  $(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})$ . Вычисляемые интегралы примут вид:

$$U_{mn} = \int_{\Gamma^{(n)}} \frac{1}{\sqrt{\zeta_{m3}^2 + (x_1 - \zeta_{m1}^2)^2 + (x_2 - \zeta_{m2}^2)^2}} d\Gamma_x,$$

$$Q_{mn} = \int_{\Gamma^{(n)}} \frac{1}{[\zeta_{m3}^2 + (x_1 - \zeta_{m1}^2)^2 + (x_2 - \zeta_{m2}^2)^2]^{3/2}} d\Gamma_x.$$

В результате перехода к повторным получим:

$$U_{mn} = \int_0^h \int_{k_1 x_1}^{k_2 x_1} \frac{1}{\sqrt{\zeta_{m3}^2 + (x_1 - \zeta_{m1}^2)^2 + (x_2 - \zeta_{m2}^2)^2}} dx_2 dx_1. \quad (10)$$

$$Q_{mn} = \int_0^h \int_{k_1 x_1}^{k_2 x_1} \frac{1}{[\zeta_{m3}^2 + (x_1 - \zeta_{m1}^2)^2 + (x_2 - \zeta_{m2}^2)^2]^{3/2}} dx_2 dx_1. \quad (11)$$

Интегралы (10, 11) после ряда замен приводятся к дробно-рациональным выражениям и интегрируются в элементарных функциях. Обозначим первообразную интеграла (10) через  $F_1(c, \zeta_3, z, k)$ , а интеграла (11) через  $F_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z, k)$ . Функция  $F_1(c, \zeta_3, z, k)$  представляет комбинацию функций задающими угол между элементом и направлением на точку влияния и логарифм расстояния от узла элемента до точки влияния типа (9). Для функции  $F_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z, k)$  – комбинацию функций с аналогичными аргументами. Рассматриваются следующие взаимные положения точки  $\zeta$  и элемента:

1. Точка  $\zeta$  лежит вне плоскости элемента. Тогда подынтегральные функции непрерывны и интегралы (10, 11) непрерывные функции параметров – координат точки  $\zeta$ .

2. Точка  $\zeta$  лежит на плоскости элемента, внутри или вне его. Пределы первообразных соответственно равны:

$$F_1(c, 0, x, k) = -\frac{2c \ln \left[ \sqrt{z^2 + c^2} - z \right]}{\left( \sqrt{1 + k^2} - k \right) \sqrt{1 + k^2}} +$$

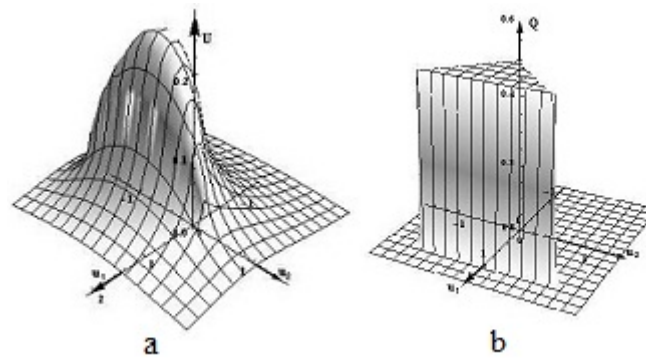
$$+ \frac{ck \ln \left[ c^2 + \frac{2(c - (k + \sqrt{1 + k^2})z)(z - \sqrt{z^2 + c^2})}{\sqrt{1 + k^2}} \right] + z \ln \left[ \frac{c - kz}{\sqrt{1 + k^2}} + \sqrt{z^2 + c^2} \right] - z}{\sqrt{1 + k^2}},$$

$$F_2(c, 0, x, k) = \frac{\pi}{2} \left\{ \text{sign} \left[ c \left( k + \sqrt{1 + k^2} \right) + x - \sqrt{c^2 + x^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \text{sign} \left[ c \left( \sqrt{1 + k^2} - k \right) - x + \sqrt{c^2 + x^2} \right] \right\}.$$

Графики предельных функций  $F_1$  и  $F_2$  представлены на рис. 3а и 3б.

3. Точка лежит на границе элемента. Функции  $Q_{mn}(\zeta_1, \zeta_2, 0)$  имеют разрыв равный  $2\pi$ , а функции  $U_{mn}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  – устранимые разрывы.

Рис. 3. Поверхности функций  $F_1$  и  $F_2$ 

## Пример 2

Для оценки точности построенного метода решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в кубе. Заданы следующие граничные условия: поверхность  $\Gamma_1$  – вся поверхность куба, поверхность  $\Gamma_2 = \emptyset$ .

При

$$x_1 = -0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5, u = 2;$$

$$x_1 = 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5, u = 1;$$

$$-0.5 \leq x_1 \leq 0.5, x_2 \pm 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5, u = 0;$$

$$-0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, x_3 \pm 0.5, u = 0,$$

полученное численное решение сравнивалось с аналитическим, построенным в виде ряда

$$u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \cos \pi(2k-1)x_2 \cos \pi(2m-1)x_3}{(2k-1)(2m-1)} \times \quad (12)$$

$$\times (3 \cosh(c_{1mk}x_1) - \sinh(c_{1mk}x_1)),$$

где  $c_{1mk} = \pi \sqrt{(2k-1)^2 + (2m-1)^2}$ . На рис. 4а показано сравнение численного реше-

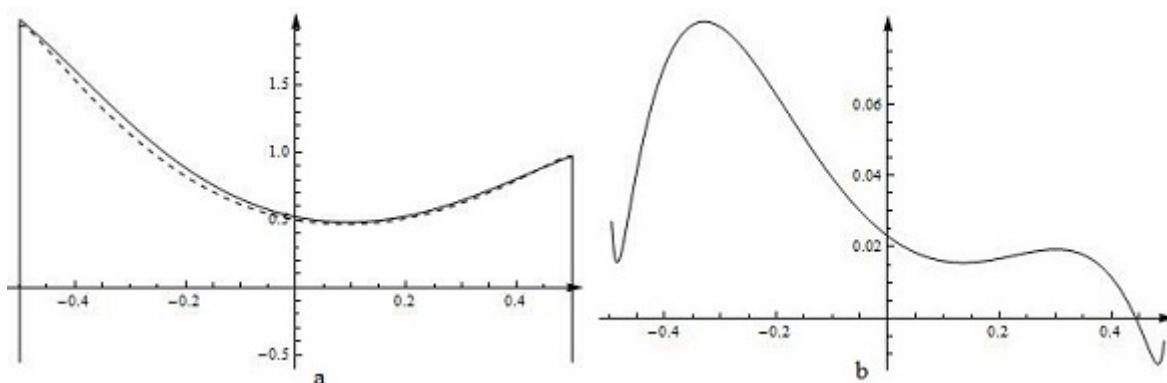


Рис. 4. Сравнение аналитического и приближенного решений

ния с аналитическим на прямой  $(-0.5, 0, 0) - (0.5, 0, 0)$ . Сплошной линией выделено

численное решение, пунктиром – аналитическое. На рис. 4b показана погрешность численного решения вдоль той же прямой.

Было также построено решение методом граничных элементов с численным интегрированием по элементам. Сравнительные результаты представлены в таблице.

Таблица

Сравнение решений, полученных различными методами			
$x$	Аналитическое решение	Численно-аналитическое решение	Решение по методу граничных элементов
-0.375	1.43016	1.50863	1.34032
-0.250	0.96719	1.0412	0.801924
-0.125	0.65859	0.703483	0.484194
0.0	0.5	0.523011	0.337388
0.125	0.4721	0.487691	0.327176
0.250	0.56012	0.578455	0.440945
0.375	0.74827	0.763672	0.684603

Из приведенной таблицы и графиков видно, что погрешность численно-аналитического решения не превышает 10 %. Погрешность численного решения существенно больше. Время счета численного решения примерно в 3 раза больше, чем численно-аналитического.

### Пример 3

Для этой же области решена задача для уравнения Лапласа с иными краевыми условиями: поверхность  $\Gamma_2$  образована двумя квадратами:

$$x_1 = -0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5, u = 2;$$

$$x_1 = 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5, u = 1;$$

поверхность  $\Gamma_1$ :

$$-0.5 \leq x_1 \leq 0.5, x_2 \pm 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5, u = 0;$$

$$-0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, x_3 \pm 0.5, u = 0.$$

Аналитическое решение при данных краевых условиях имеет вид:

$$u = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \cos \pi(2k-1)x_2 \cos \pi(2m-1)x_3 \sinh(c_{1mk}x_1)}{(2k-1)(2m-1) \cosh(c_{1mk}x_1)} \quad (13)$$

На рис. 5a показано сравнение численного решения с аналитическим на прямой  $(-0.5, 0, 0) - (0.5, 0, 0)$ . Сплошной линией выделено численное решение, пунктиром – аналитическое. На рис. 5b показана погрешность численного решения вдоль той же прямой.



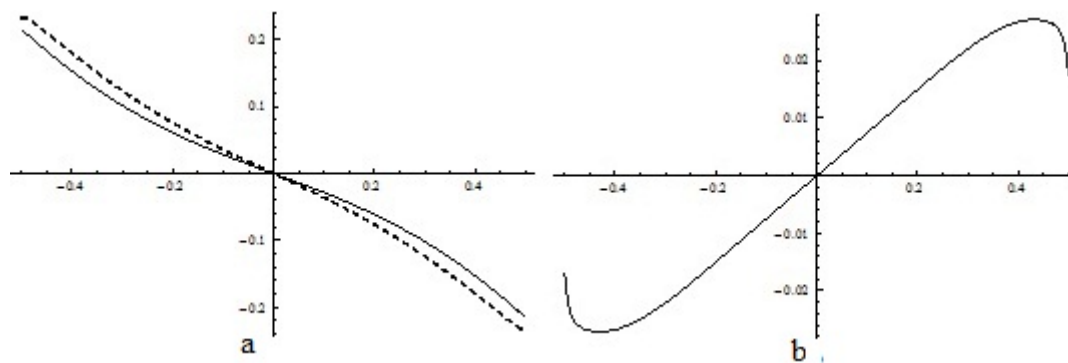


Рис. 5. Сравнение аналитического и приближенного решения

## Заключение

В работе рассматривается применение модифицированного метода граничных элементов к некоторым задачам теории потенциала. В изложенном методе максимально используются аналитические вычисления. Их результаты годятся для использования в любых задачах теории потенциала. Основой метода является вычисление интегралов по базовому элементу.

Приведенные примеры решения некоторых задач показывают, что используемый метод позволяет получить достаточно высокую точность при небольшом числе элементов, а скорость вычислений больше, чем при использовании численных методов интегрирования по элементам.

## Библиографический список

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Хомяков А.Н. Метод граничных элементов повышенной точности в задачах гидродинамики идеальной жидкости // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 401-404.
3. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1959. 232 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. О возможностях метода граничных элементов при моделировании континуальных систем. – URL: <http://technomag.edu.ru/doc/48397.html>
5. Федотов В.П., Нефедова О.А. Применение модифицированного метода граничных элементов для решения параболических задач // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Вып. 4 (25). С. 93-101.
6. Федотов В.П. Модифицированный метод граничных элементов для решения задач колебания пластин // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (3). С. 18-32.
7. Федотов В.П., Слевак Л.Ф. Аналитическое интегрирование функций влияния для решения задач упругости и теории потенциала методом граничных элементов // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 2. С. 87-104.
8. Федотов В.П., Горшков А.В. Численно-аналитический метод решения задач упругости с особенностями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2005. Т. 38. С. 29-34.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.11.2012