Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2012. № 2 (5). С. 37-41. ISSN 2079-6641

УДК 519.86

# НЕЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕОКЛАССИЧЕСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СОЛОУ

**Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И.**

Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложено обобщение модели Солоу, когда изменения ресурсов в производственной функции описывается производными дробных порядков в смысле Герасимова – Капуто. В результате мы приходим к важной экономической величине – капиталовооруженности, в которая характеризуется стпенными функциями типа Миттаг-Леффлера.

*Ключевые слова: модель Солоу, оператор Герасимова – Капуто, функция типа Миттаг-Леффлера*



MSC 00A71

# NONLOCAL MODEL OF NEOCLASSICAL ECONOMIC GROWTH SOLOW

**Samuta V.V., Strelova V.A., Parovik R.I.**

Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11/1, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

In generalization of the Solow model, when the change in resources in the production function described derivatives of fractional order in the sense of the Gerasimov – Caputo. As a result, we come to an important economic value — capital-labor ratio, which is characterized in stpennymi functions of Mittag-Leffler.

*Key words: Solow model, the operator Gerasimov – Caputo, function of the type Mittag-Leffler*

## Введение

Как известно, модель Солоу считается односектороной динамической моделью экономического роста [1]. Особенностью такой экономической модели является то, что объектом исследования выступает единственный универсальный продукт (ЕУП), который в свою очередь потребляется в производственной и в непроизводственной сферах. В качестве ЕУП может выступать денежная оценка всей экономике. В производственной сфере потребление ЕУП может рассматриваться как инвестирование.

## Постановка задачи

Экономическая система, которая описывается в рамках этой модели явно не учитывает возможность экспорта или импорта и определяется двумя группами параметров: внутренними и внешними [1]. Внутренние парметры, которые зависят непрерывно от времени $t$: $L(t)$ – трудовые ресурсы или затраты труда; $K(t)$ – производственные фонды $Y(t)$ – ЕУП, который определяется производственной функцией; $C(t)$ – непроизводственные фонды; $I(t)$ – инвестиции. Внешние параметры: $-1 < a < 1$ – годовой темп прироста трудовых ресурсов; $0 < b < 1$ – коэффициент выбытия капитала; $0 < \eta < 1$ – норма накопления. Будем считать, что производственные и трудовые ресурсы для производства годового ЕУП расходуются полностью.

ЕУП определяется производственной функцией неоклассического типа. Обозначим эту функцию $Y = F(K,L)$. Эта функция является однородной функцией первого порядка, т.е. выполнено $Y = F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)$, а также обладает следующими свойствами:

1) $Y = F(K,0) = F(0,L) = 0$, т.е. отсутвие какого-либо из ресурсов не дает производить ЕУП;

2) $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$, $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$ — рост ресурсов влечет к росту производства;

3) $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$ – с увеличением количества ресурсов темп роста производства замедляется;

4) $Y = F(K,\infty) = F(\infty,L) = \infty$ – при неограниченном росте ресурсов производство неограниченно возрастает.

Из распространенных производственных функций, наиболее удовлетворяющих перечисленным выше условиям, является функция Кобба – Дугласа:

$$Y = F(K,L) = AK^{\gamma}L^{1-\gamma},\ A > 0,\ 0 < \gamma < 1. \tag{1}$$

В работе [2] для вывода производственной функции предложена методика основанная на дробном исчислении [3]. Предполагается, что производственная функция $F(K,L)$ – является решением следующего дифференциального уравнения дробного порядка:

$$\mu_1 D_{0K}^{\alpha_K} + \mu_2 D_{0L}^{\alpha_L} = 0, \tag{2}$$

где $\eta_1$ и $\eta_2$ – некоторые технические параметры, $0<\alpha_K,\alpha_L<1$. Решение такой задачи можно записать с помощью функции типа Миттаг-Леффлера:

$$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}E_{\alpha_K,\alpha_K}(\lambda_K K^{\alpha_K})E_{\alpha_L,\alpha_K}(\lambda_L K^{\alpha_L}),\ E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad (3)$$

где $\lambda_K$ и $\lambda_L$ – управляющие параметры, $A_0>0$ – произвольная константа. Если в (3) положить $\alpha_K+\alpha_L=3$, $A=A_0/[\Gamma(\alpha_K)\Gamma(\alpha_L)]$, то мы получим функцию Кобба – Дугласа (1). Существуют и другие методики определенеия производственных функций [4].

С другой стороны ЕУП используется на непроизводственное потребление и инвестиции:

$$Y(t)=C(t)+I(t). \quad (4)$$

Инвестиции $I(t)$ также можно представить через ЕУП и коэффициент накопления $\eta$ $I(t)=\eta Y(t)$, поэтому (4) можно записать $Y(t)=C(t)+\eta Y(t)$ и отсюда непроизводственные фонды можно найти из соотношения:

$$C(t)=Y(t)(1-\eta). \quad (5)$$

Рассмотрим изменение ресурсов $L(t)$ и $K(t)$ в моменты времени $t$. В работе [1] изменение трудовых ресурсов $L(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dL(t)}{dt}=aL,\ L(0)=L_0, \quad (6)$$

где $L_0$ – начальные трудовые ресурсы. В работе [5] изменение трудовых ресурсов происходит по логистическому закону:

$$\frac{dL(t)}{dt}=[a-\varepsilon L(t)]L(t),\ L(0)=L_0,\ \varepsilon\geq 0. \quad (7)$$

В работе мы будем предполагать, что прирост трудовых ресурсов будет происходить по другому закону:

$$\partial_{0t}^{\alpha_K}L(\tau)=aL,\ L(0)=L_0, \quad (8)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha_L}L(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha_L)}\displaystyle\int_0^t\frac{L'(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_L}}$ – оператор дробной производной порядка $\alpha_L$ в смысле Герасимова – Капуто [5]. Уравнение (8) считается нелокальным за счет степенного ядра в операторе дробного дифференцирования. Запасы капиатала $K(t)$ изменяются за счет инвестиций и выбытия капиталов (амортизации). В работе [1] запасы $K(t)$ описываются дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt}=\eta Y(t)-bK(t),\ K(0)=K_0, \quad (9)$$

где $K_0$ – начальные запасы капитала. Мы обобщим закон (9), следуя уравнению (8)

$$\partial_{0t}^{\alpha_K}K(t)=\eta Y(t)-bK(t),\ K(0)=K_0,\ 0<\alpha_K<1. \quad (10)$$

Надо отметить, что при $\alpha_K=\alpha_L=1$ мы получим соотношения (6) и (9). Нелокальная модель Солоу с учетом соотношений (5), (8), (9) может быть записана так:

$$\begin{cases} Y(t)=F(K(t),L(t)), \\ C(t)=Y(t)(1-\eta), \\ \partial_{0t}^{\alpha_K}L(\tau)=aL,\ L(0)=L_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_K}K(t)=\eta Y(t)-bK(t),\ K(0)=K_0,\ 0<\alpha_K<1. \end{cases} \quad (11)$$

## Решение задачи

Последние два уравнения имеют решения [6]:

$$L(t) = L_0 E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right),$$

$$K(t) = K_0 E_{\alpha_K,1}\left(-bt^{\alpha_K}\right) + \eta \int\limits_0^t Y(\tau)(t-\tau)^{\alpha_K-1} E_{\alpha_K,\alpha_K}\left(-b(t-\tau)^{\alpha_K}\right) d\tau.$$

Введем в рассмотрение величину $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$ – капиталовооруженность. Тогда капиталовооруженность перепишем в виде:

$$k(t) = k_0 \frac{E_{\alpha_K,1}\left(-bt^{\alpha_K}\right)}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} + \frac{\eta}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} \int\limits_0^t Y(\tau)(t-\tau)^{\alpha_K-1} E_{\alpha_K,\alpha_K}\left(-b(t-\tau)^{\alpha_K}\right) d\tau, \quad (12)$$

где $k_0 = \frac{K_0}{L_0}$. Функция $E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)$ не имеет вещественных нулей [3], поэтому ограничений в (12) на $t$ нет. Рассмотрим производственную функцию Кобба – Дугласа (1), подставим ее в решение (12) с учетом ее однородности, получим:

$$k(t) = k_0 \frac{E_{\alpha_K,1}\left(-bt^{\alpha_K}\right)}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} + \quad (13)$$

$$+ \frac{\eta A}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} \int\limits_0^t k^{\gamma}(\tau)(t-\tau)^{\alpha_K-1} E_{\alpha_L,1}\left(a\tau^{\alpha_L}\right) E_{\alpha_K,\alpha_K}\left(-b(t-\tau)^{\alpha_K}\right) d\tau.$$

Уравнение (13) является нелинейным уравнением Вольтерра второго рода, его можно решить методом квадратур [7].

Необходимо отметить, что при значении парметров $\alpha_K = \alpha_L = 1$ решение (13) переходит в известное решение [1]:

$$k(t) = \left[\frac{\eta A}{b+a} + \left(k_0^{1-\gamma} - \frac{\eta A}{b+a}\right) e^{-(b+a)(1-\gamma)t}\right]^{1/(1-\gamma)}.$$

## Заключение

Решение (13) описывает поведение макроэкономических показателей экономической ситемы. Параметризация модели Солоу обобщает ранее известные результаты и содержит новые результаты, которые необходимо изучить отдельною и дать им соответсвующую экономическую интерпретацию.

## Библиографический список


1. Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н., Шуман Г.И. Математическое моделирование экономических процессов и систем. М.: Кнорус, 2011. 200 с

2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Терехов Л.Л. Производственные функции. М.: Статистика, 1974. 113 с.

5. Нахушева З.А. Об одной односекторной макроэкономической модели долгосрочного прогнозирования // Доклады АМАН. 2012. Т. 14. №1. С. 124–127.

6. Паровик Р.И. Решение нелокального уравнения аномальной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (2). С. 37-44.

7. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

8. Полянин А.А., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.11.2012