Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2012. № 2 (5). С. 7-17. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ГРУППЫ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ *

Нощенко Д.С.[1], Ильин И.А.[1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

В данной работе для 50 нелинейных ОДУ второго порядка, обладающих свойством Пенлеве, найдены однопараметрические группы симметрий и в некоторых случаях построены обшие решения. Статья может служить справочным материалом для математиков, интересующихся нелинейными уравнениями.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, особые точки, свойство Пенлеве, группы симметрии

MATHEMATICA

MSC 70G65

SYMMETRY GROUPS FOR PAINLEVE EQUATIONS

Noshchenko D.S.[1], Ilyin I.A.[1,2]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
[2] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7

In this study, one-parametric symmetry groups were found for 50 canonical equations with Painleve property, and, in special cases, general solutions were obtained. The result can be used as reference for specialists in the theory of nonlinear differential equations.

Key words: differential equation, singularities, Painleve property, symmetry groups

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» на 2012–2016 гг.

Введение

Дифференциальное уравнение обладает свойством Пенлеве, если его общее решение на комплескной плоскости (или на римановой поверхности, если решение многозначно) не имеет подвижных (т.е. зависящих от начальных данных) существенно особых точек. Согласно теореме Миттаг-Леффлера, функция комплексного переменного полностью определяется своими особыми точками, поэтому анализ особенностей нелинейного уравнения на комплексном домене можно рассматривать как один из способов его решения. В свою очередь, если нелинейной уравнение обладает свойством Пенлеве, то с большей вероятностью можно рассчитывать на то, что тем или иным способом это уравнение может быть проинтегрировано.

В начале XX в. П. Пенлеве и его учениками ([1, 2, 4]) была решена задача о выделении ОДУ второго порядка (в случае первого порядка все тривиально), обладающих свойством Пенлеве. Всего было найдено 50 уравнений, причем 6 из них оказались неинтегрируемыми в привычном смысле, но образующими новый класс функций, невыразимых через известные – т.н. трансценденты Пенлеве.

Э. Айнс в своей книге [1] приводит все 50 уравнений. В настоящей работе именно для них были найдены инфинитезимальные образующие ξ,η однопараметрической группы Ли G симметрий [3]

$$\mathbf{v} = \xi(x,y)v_1 + \eta(x,y)v_2,$$

где $\exp\mathbf{v} = G$ и для некоторых построены общие решения. Вычисления производились в пакете Maple. Симметрии найдены с помощью подпрограммы для Maple [5].

Уравнения Пенлеве

Результаты приведены в следующем виде:

<уравнение>
<решение> (в некоторых случаях)
<тип уравнения> (для трансцендентов Пенлеве)
<группа симметрий>

Представим некоторые встречающиеся специальные функции:

* WeierstrassP(.) – P-функция Вейерштрасса;
* JacobiSN(.) – эллиптическая функция Якоби (обращение эллиптического интеграла);
* hypergeom(.) – обобщенная гипергеометрическая функция.

1)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = 0$$

$$\mathrm{w}(x) = \_C1\,x + \_C2$$

$$[\xi = (-C_3 + C_1)x + C_5,\ \eta = C_4 x + C_1 w + C_2\,(\frac{\partial}{\partial x}w) + C_6]$$

2)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = 6\,\mathrm{w}(x)^2$$

$$\mathrm{w}(x) = \mathrm{WeierstrassP}(x + \_C1, 0, \_C2)$$

$$[\xi = -\frac{1}{2}\,x\,C_1 + C_2,\ \eta = C_1\,w]$$

3)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = 6\,\mathrm{w}(x)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{w}(x) = \mathrm{WeierstrassP}(x + \_C1, -1, \_C2)$$

$$[\xi = C_1,\ \eta = 0]$$

4)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = 6\,\mathrm{w}(x)^2 + x$$

$$[[\_Painleve,\ 1st]]$$

$$[\xi = 0,\ \eta = 0]$$

5)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = -2\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))\,\mathrm{w}(x) + \mathrm{q}(x)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)) + (\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))\,\mathrm{w}(x)$$

$$[\xi = 0,\ \eta = 0]$$

6)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = -8\,\mathrm{w}(x)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)) - \mathrm{w}(x)^3 + \mathrm{q}(x)\,((\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)) + \mathrm{w}(x)^2)$$

$$[\xi = 0,\ \eta = 0]$$

7)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = 2\,\mathrm{w}(x)^3$$

$$\mathrm{w}(x) = \_C2\,\mathrm{JacobiSN}((x\,I + \_C1)\,\_C2, I)$$

$$[\xi = -x\,C_1 + C_2,\ \eta = C_1\,w]$$

8)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = 2\,\mathrm{w}(x)^3 + \beta\,\mathrm{w}(x) + \gamma$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)} \frac{1}{\sqrt{\_C1 + \_a^4 + \beta\,\_a^2 + 2\,\gamma\,\_a}}\,d\_a - x - \_C2 = 0,$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)} -\frac{1}{\sqrt{\_C1 + \_a^4 + \beta\,\_a^2 + 2\,\gamma\,\_a}}\,d\_a - x - \_C2 = 0$$

$$[\xi = C_1,\ \eta = 0]$$

9)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = 2\,\mathrm{w}(x)^3 + x\,\mathrm{w}(x) + \gamma$$

$$[[\_Painleve,\, 2nd]]$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

10)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = -(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)) + \mathrm{w}(x)^3 - 12\,\mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x) + 12\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

11)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}$$

$$\mathrm{w}(x) = e^{(\_C1\,x)}\_C2$$

$$[\xi = (-C_2 + C_1)\,x + C_3,\, \eta = C_1\,w]$$

12)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)} + \alpha\,\mathrm{w}(x)^3 + \beta\,\mathrm{w}(x)^2 + \gamma + \frac{\delta}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi = C_1,\, \eta = 0]$$

13)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)} + \alpha\,\mathrm{w}(x)^4 + 2\,\beta\,\mathrm{w}(x)^3 - 2\,\gamma\mathrm{w}(x) - \delta + K\,\mathrm{w}(x)^2$$

$$[\xi = C_1,\, \eta = 0]$$

14)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)} - \frac{\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)}{x} + \frac{\alpha\,\mathrm{w}(x)^2 + \beta}{x} + \gamma\mathrm{w}(x)^3 + \frac{\delta}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[[\_Painleve,\, 3rd]]$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

15)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)} + e^x\,(\alpha\,\mathrm{w}(x)^2 + \beta) + e^{(2\,x)}\,(\gamma\mathrm{w}(x)^3 + \frac{\delta}{\mathrm{w}(x)})$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

16)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)} + \mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x) + \frac{\mathrm{r}(x)}{\mathrm{w}(x)} + (\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))\,\mathrm{w}(x)^2 - (\frac{d}{dx}\,\mathrm{r}(x))$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

17)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x) = \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)} + \frac{\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)}{\mathrm{w}(x)} + \mathrm{r}(x)\,\mathrm{w}(x)^2 - \mathrm{w}(x)\left(\frac{\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{r}(x)}{\mathrm{r}(x)} - \frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{r}(x))^2}{\mathrm{r}(x)^2}\right)$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

18)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}-\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))}{\mathrm{w}(x)}+\mathrm{w}(x)^3-\mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x)^2+(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{q}(x))$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

19)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{(m-1)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{m\,\mathrm{w}(x)}$$

$$\mathrm{w}(x)=(\frac{\_C1\,x+\_C2}{m})^m$$

$$[\xi=(-C_2+C_1)\,x+C_3,\,\eta=C_1\,w]$$

20)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+4\,\mathrm{w}(x)^2$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)}\frac{1}{\sqrt{4\,\_a^3+\_C1\,\_a}}\,d\_a-x-\_C2=0,\,\int^{\mathrm{w}(x)}-\frac{1}{\sqrt{4\,\_a^3+\_C1\,\_a}}\,d\_a-x-\_C2=0$$

$$[\xi=-\frac{1}{2}\,C_1\,x+C_2,\,\eta=C_1\,w]$$

21)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+4\,\mathrm{w}(x)^2+2\,\mathrm{w}(x)$$

$$[\xi=C_1,\,\eta=0]$$

22)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+4\,\mathrm{w}(x)^2+2\,x\,\mathrm{w}(x)$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

23)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+3\,\mathrm{w}(x)^2$$

$$[\xi=-\frac{1}{2}\,C_1\,x+C_2,\,\eta=C_1\,w]$$

24)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}-1$$

$$[\xi=\frac{1}{2}\,C_1\,x+C_2,\,\eta=C_1\,w]$$

25)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+3\,\mathrm{w}(x)^2+\alpha\,\mathrm{w}(x)+\beta$$

$$[\xi=C_1,\,\eta=0]$$

26)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{(m-1)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{m\,\mathrm{w}(x)}+\mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))-\frac{m\,\mathrm{q}(x)^2\,\mathrm{w}(x)^3}{(m+2)^2}+\frac{m\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))\,\mathrm{w}(x)^2}{m+2}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

27)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}-\frac{3}{2}\,\mathrm{w}(x)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))-\frac{1}{4}\,\mathrm{w}(x)^4+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))\,(\mathrm{w}(x)^2+(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))+\mathrm{r}(x)\,\mathrm{w}(x)+\mathrm{q}(x))}{\mathrm{q}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

28)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+\frac{6\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))}{\mathrm{w}(x)}+8\,\mathrm{w}(x)^2+$$

$$+12\,\mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x)-12\,(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{q}(x))-\frac{36\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

29)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{(m-1)\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{m\,\mathrm{w}(x)}+(\mathrm{f}(x)\,\mathrm{w}(x)+\varphi(x)-\frac{m-2}{m\,\mathrm{w}(x)})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))-\frac{m\,\mathrm{f}(x)^2\,\mathrm{w}(x)^3}{(m+2)^2}+$$

$$+\frac{m\,((\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x))-\mathrm{f}(x)\,\varphi(x))\,\mathrm{w}(x)^2}{m+2}+\psi(x)\,\mathrm{w}(x)-\varphi(x)-\frac{1}{m\,\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

30)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}-(\mathrm{w}(x)-\mathrm{q}(x))\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))+\frac{1}{2}\,\mathrm{w}(x)^2-$$

$$-2\,\mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x)^2+3\,((\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))+\frac{1}{2}\,\mathrm{q}(x)^2)\,\mathrm{w}(x)-\frac{72\,\mathrm{r}(x)^2}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

31)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+\frac{3}{2}\,\mathrm{w}(x)^2$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)}-\frac{2}{\sqrt{6\_a^3+2\_C1\_a}}\,d\_a-x-\_C2=0,\,\int^{\mathrm{w}(x)}\frac{2}{\sqrt{6\_a^3+2\_C1\_a}}\,d\_a-x-\_C2=0$$

$$[\xi=-\frac{1}{2}C_1\,x+C_2,\,\eta=C_1\,w]$$

32)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+\frac{3}{2}\,\mathrm{w}(x)^2+4\,\alpha\,\mathrm{w}(x)^2+2\,\beta\,\mathrm{w}(x)-\frac{1}{2}\,\frac{\gamma^2}{\mathrm{w}(x)}$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)}-\frac{2}{\sqrt{6\_a^3+16\,\alpha\,\_a^3+16\,\beta\,\_a^2+4\,\gamma^2+4\,\_C1\,\_a}}\,d\_a-x-\_C2=0,$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)}\frac{2}{\sqrt{6\_a^3+16\,\alpha\,\_a^3+16\,\beta\,\_a^2+4\,\gamma^2+4\,\_C1\,\_a}}\,d\_a-x-\_C2=0$$

$$[\xi=C_1,\,\eta=0]$$

33)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+\frac{3}{2}\,\mathrm{w}(x)^2+4\,x\,\mathrm{w}(x)^2+2\,(x^2-\alpha)\,\mathrm{w}(x)-\frac{1}{2}\,\frac{\beta^2}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

34)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+4\,\mathrm{w}(x)^2+\mathrm{w}(x)\,\alpha-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=C_1,\,\eta=0]$$

35)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}+4\,\alpha\,\mathrm{w}(x)^2-x\,\mathrm{w}(x)-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

36)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{2}{3}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2}{\mathrm{w}(x)}-(\frac{2}{3}\,\mathrm{w}(x)-\frac{2}{3}\,\mathrm{q}(x)-\frac{\mathrm{r}(x)}{\mathrm{w}(x)})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))+\frac{2}{3}\,\mathrm{w}(x)^3+\frac{10}{3}\,\mathrm{w}(x)^2+$$

$$+(4\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{q}(x))+\mathrm{r}(x)+\frac{2}{3}\,\mathrm{q}(x)^2)\,\mathrm{w}(x)+2\,\mathrm{q}(x)\,\mathrm{r}(x)-3\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{r}(x))-\frac{8\,\mathrm{r}(x)^2}{\mathrm{w}(x)}$$

$$[\xi=0,\,\eta=0]$$

37)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=(\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2$$

$$\mathrm{w}(x)=\tanh(\frac{\_C1\,x}{2}+\frac{\_C2}{2})^2$$

$$[\xi=-C_1\,x+C_2,\,\eta=0]$$

38)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=(\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2+\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\,(\alpha\,(\mathrm{w}(x)-1)+$$

$$+\frac{\beta\,(\mathrm{w}(x)-1)}{\mathrm{w}(x)^2}+\frac{\gamma}{\mathrm{w}(x)-1}+\frac{\delta}{(\mathrm{w}(x)-1)^2})$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)}1/((-2\,\beta+4\,\beta\,\_a+2\,\gamma\,\_a-\delta\,\_a+4\,\_a\,\alpha-2\,\gamma\,\_a^2-2\,\beta\,\_a^2-6\,\alpha\,\_a^2+2\,\alpha\,\_a^4+$$

$$+\_C1\_a^3 - 2\_C1\_a^2 + \_C1\_a)^{(1/2)})d\_a - x - \_C2 = 0, \int^{w(x)} -$$

$$-1/((-2\beta + 4\beta\_a + 2\gamma\_a - \delta\_a + 4\_a\alpha - 2\gamma\_a^2 - 2\beta\_a^2 - 6\alpha\_a^2 + 2\alpha\_a^4 +$$

$$+\_C1\_a^3 - 2\_C1\_a^2 + \_C1\_a)^{(1/2)})d\_a - x - \_C2 = 0$$

$$[\xi = C_1, \eta = 0]$$

39)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = (\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2 - \frac{\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)}{x} +$$

$$\frac{(\mathrm{w}(x)-1)^2(\mathrm{w}(x)\alpha + \frac{\beta}{\mathrm{w}(x)})}{x^2} + \frac{\gamma\mathrm{w}(x)}{x} + \frac{\delta\mathrm{w}(x)(\mathrm{w}(x)+1)}{\mathrm{w}(x)-1}$$

$$[[\_Painleve, 5th]]$$

$$[\xi = 0, \eta = 0]$$

40)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = (\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2 + \frac{2(\mathrm{q}(x)\mathrm{w}(x) + \mathrm{r}(x))(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))}{\mathrm{w}(x)-1} +$$

$$+\frac{1}{2}(\mathrm{w}(x)-1)^2(\mathrm{s}(x)^2\mathrm{w}(x) - \frac{\mathrm{t}(x)^2}{\mathrm{w}(x)}) + 2(\mathrm{q}(x)^2 - \mathrm{r}(x)^2 - (\frac{d}{dx}\mathrm{q}(x)) - (\frac{d}{dx}\mathrm{r}(x)))\mathrm{w}(x)$$

$$[\xi = 0, \eta = 0]$$

41)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = \frac{2}{3}(\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2$$

$$\frac{3(-\mathrm{signum}(\mathrm{w}(x)-1))^{(2/3)}\mathrm{w}(x)^{(1/3)}\mathrm{hypergeom}([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{4}{3}], \mathrm{w}(x))}{\mathrm{signum}(\mathrm{w}(x)-1)^{(2/3)}} - \_C1\,x - \_C2 = 0$$

$$[\xi = -C_1 x + C_2, \eta = 0]$$

42)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = \frac{2}{3}(\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2 + (\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))(\mathrm{q}(x)\mathrm{w}(x) + \frac{\mathrm{r}(x)}{\mathrm{w}(x)} -$$

$$-\frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{w}(x)-1} - \frac{1}{2}\mathrm{q}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{r}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{s}(x)) +$$

$$+\mathrm{w}(x)(\mathrm{w}(x)-1)\Bigg(3\mathrm{q}(x)^2\mathrm{w}(x) + \frac{3\mathrm{r}(x)^2}{\mathrm{w}(x)^2} - \frac{3\mathrm{s}(x)^2}{(\mathrm{w}(x)-1)^2} + 3(\frac{d}{dx}\mathrm{q}(x)) +$$

$$+\frac{3}{2}\mathrm{q}(x)(\mathrm{r}(x) + \mathrm{s}(x) - \mathrm{q}(x)) + \frac{3(\frac{d}{dx}\mathrm{r}(x)) - \frac{3}{2}\mathrm{r}(x)(\mathrm{r}(x) + \mathrm{s}(x) - \mathrm{q}(x))}{\mathrm{w}(x)} +$$

$$+\frac{3(\frac{d}{dx}\mathrm{s}(x)) - \frac{3}{2}\mathrm{s}(x)(\mathrm{q}(x) + \mathrm{r}(x) + \mathrm{s}(x))}{\mathrm{w}(x)-1}\Bigg)$$

$$[\xi = 0, \eta = 0]$$

43)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2$$

$$\frac{4\,(-\mathrm{signum}(\mathrm{w}(x)-1))^{(3/4)}\,\mathrm{w}(x)^{(1/4)}\,\mathrm{hypergeom}([\frac{1}{4},\frac{3}{4}],[\frac{5}{4}],\mathrm{w}(x))}{\mathrm{signum}(\mathrm{w}(x)-1)^{(3/4)}}-\_C1\,x-\_C2=0$$

$$[\xi=-C_1\,x+C_2,\ \eta=0]$$

44)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2+\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\,(\frac{\alpha}{\mathrm{w}(x)}+\frac{\beta}{\mathrm{w}(x)-1}+2\,\gamma(\mathrm{w}(x)-1))$$

$$[\xi=C_1,\ \eta=0]$$

45)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2+(\mathrm{A}(x)+\frac{\mathrm{B}(x)}{\mathrm{w}(x)}-\frac{\mathrm{C}(x)}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))+$$

$$+\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\,(4\,\mathrm{E}(x)^2\,(2\,\mathrm{w}(x)-1)+\frac{\mathrm{B}(x)^2}{\mathrm{w}(x)^2}-\frac{\mathrm{C}(x)^2}{(\mathrm{w}(x)-1)^2}+\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{w}(x)}+\frac{\mathrm{K}(x)}{\mathrm{w}(x)-1})$$

$$[\xi=0,\ \eta=0]$$

46)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2-\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{H}(x))\,(1+\frac{3}{2\,\mathrm{w}(x)-2})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))}{\mathrm{H}(x)}+$$

$$+\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\left(\frac{4\,\beta^2\,(2\,\mathrm{w}(x)-1)}{\mathrm{H}(x)^2}-\frac{3}{4}\,\frac{\frac{d}{dx}\,\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}(x)^2\,(\mathrm{w}(x)-1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{w}(x)}-\frac{3\,(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{H}(x))}{\mathrm{H}(x)}+\frac{9}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{H}(x))^2}{\mathrm{H}(x)^2\,(\mathrm{w}(x)-1)}\right)$$

$$[\xi=0,\ \eta=0]$$

47)

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)=\frac{3}{4}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)}+\frac{1}{\mathrm{w}(x)-1})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))^2-\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{H}(x))\,(1+\frac{3}{2\,\mathrm{w}(x)-2})\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x))}{\mathrm{H}(x)}+$$

$$+\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\left(\frac{(2\,\alpha+1)^2\,(2\,\mathrm{w}(x)-1)}{\mathrm{H}(x)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{9}{4}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{H}(x))^2}{\mathrm{H}(x)^2\,(\mathrm{w}(x)-1)^2}+\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{w}(x)}+\frac{3\,(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{H}(x))}{\mathrm{H}(x)}-\frac{9}{2}\,\frac{(\frac{d}{dx}\,\mathrm{H}(x))^2}{\mathrm{H}(x)^2\,(\mathrm{w}(x)-1)}\right)$$

$$[\xi=0,\ \eta=0]$$

48)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = (\frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{2\,\mathrm{w}(x)-2})\,(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2 + (\mathrm{A}(x)\,\mathrm{w}(x) + \mathrm{B}(x) + \frac{\mathrm{C}(x)}{\mathrm{w}(x)})\,(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)) +$$

$$+\,\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\,(\frac{3}{8}\,\mathrm{A}(x)^2\,\mathrm{w}(x) +$$

$$+\mathrm{F}(x) + \frac{3\,\mathrm{C}(x)^2}{\mathrm{w}(x)^2} + \frac{\mathrm{H}(x)}{(\mathrm{w}(x)-1)^2} + \frac{\mathrm{K}(x)}{\mathrm{w}(x)} + \frac{\mathrm{H}(x)}{3\,\mathrm{w}(x)-3})$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

49)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-1} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-\alpha})\,(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2 +$$

$$+\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\,(\mathrm{w}(x)-\alpha)\,(\beta + \frac{\gamma}{\mathrm{w}(x)^2} + \frac{\delta}{(\mathrm{w}(x)-1)^2} + \frac{\varepsilon}{(\mathrm{w}(x)-\alpha)^2})$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)} 1\,/((2\,\beta\,\_a^4 - 2\,\beta\,\_a^3 - 2\,\beta\,\_a^3\,\alpha + 2\,\beta\,\_a^2\,\alpha - 2\,\gamma\,\_a^2 + 2\,\gamma\,\_a + 2\,\gamma\,\_a\,\alpha - 2\,\gamma\alpha -$$

$$-2\,\varepsilon\,\_a^2 + 2\,\varepsilon\,\_a - 2\,\delta\,\_a^2 + 2\,\delta\,\_a\,\alpha + \_C1\,\_a^3 - \_C1\,\_a^2 - \_C1\,\_a^2\,\alpha + \_C1\,\_a\,\alpha)^{(1/2)})d\_a -$$

$$-x - \_C2 = 0,$$

$$\int^{\mathrm{w}(x)} -1\,/((2\,\beta\,\_a^4 - 2\,\beta\,\_a^3 - 2\,\beta\,\_a^3\,\alpha + 2\,\beta\,\_a^2\,\alpha - 2\,\gamma\,\_a^2 + 2\,\gamma\,\_a + 2\,\gamma\,\_a\,\alpha -$$

$$-2\,\gamma\alpha - 2\,\varepsilon\,\_a^2 + 2\,\varepsilon\,\_a - 2\,\delta\,\_a^2 + 2\,\delta\,\_a\,\alpha + \_C1\,\_a^3 - \_C1\,\_a^2 - \_C1\,\_a^2\,\alpha +$$

$$+\_C1\,\_a\,\alpha)^{(1/2)})d\_a - x - \_C2 = 0$$

$$[\xi = C_1,\, \eta = 0]$$

50)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x) = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{\mathrm{w}(x)} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-1} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-\alpha})\,(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x))^2 (\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\mathrm{w}(x)-x})\,(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{w}(x)\,(\mathrm{w}(x)-1)\,(\mathrm{w}(x)-x)\,(\alpha - \frac{\beta\,x}{\mathrm{w}(x)^2} + \frac{\gamma\,(x-1)}{(\mathrm{w}(x)-1)^2} - \frac{(\delta-1)\,x\,(x-1)}{(\mathrm{w}(x)-x)^2})}{x^2\,(x-1)^2}$$

$$[\xi = 0,\, \eta = 0]$$

Заключение

В результате работы для 50 нелинейных ОДУ второго порядка, обладающих свойством Пенлеве, получены геометрические группы симметрий. Интересным фактом является наличие *только тривиальной* однопараметрической группы симметрий у всех 6 трансцендентов Пенлеве. Кроме них, нулевыми симметриями обладают все те уравнения, правые части которых достаточно сложно устроены и переменная x входит независимым образом. Между тем, как известно, симметрии тесно связаны с законами сохранения (теорема Нетер, [3]). Также существует гипотеза [4], согласно которой трансценденты Пенлеве являются редукциями (в некотором смысле) всех уравнений нелйнейной математической физики. Тривиальная группа симметрий в нашем случае может служить подтверждением этой гипотезы. Тогда, если гипотеза верна, то трансценденты Пенлеве образуют фундаментальный класс объектов, над которым может быть выстроена современная нелинейная теория. Пока что вопрос остается открытым.

Библиографический список

1. Айнс Э. Обыкновенные диференциальные уравнения / пер. с англ. Харьков: ДНТВУ, 1939.
2. Голубев В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / пер. с англ. М.: Мир, 1989.
4. Славянов С., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб.: Невский диалект, 2002.
5. Gouveia P., Torres D. Computing ODE symmetries as abnormal variational symmetries // Nonlinear Analysis. 2008.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.10.2012