

УДК 517.955

ДИГРАММЫ СТРЕТТА-АЙНСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ*

Паровик Р.И.^{1,2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: parovikroman@gmail.com

В работе исследовано решение обобщенного уравнения Матье. С помощью диаграмм Стретта-Айнса построены области неустойчивости, условие когда может возникнуть параметрический резонанс.

Ключевые слова: фрактальная размерность, параметрический резонанс, диаграмма Стретта-Айнса.

© Паровик Р.И., 2012

MSC 00A71

CHARTS STRUTT-INCE FOR GENERALIZED MATHIEU EQUATION

Parovik R.I.^{1,2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11 / 1, Russia

E-mail: parovikroman@gmail.com

We have investigated the solution of the generalized Mathieu equation. With the aid of diagrams Stratton-Ince built the instability region, the condition can occur when the parametric resonance.

Key words: fractal dimension, parametric resonance, chart Strutt-Ince

© Parovik R.I., 2012

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-90715.

ВВЕДЕНИЕ

С развитием теории фрактальных сред разрабатываются физические модели с интегро-дифференцированием дробного порядка [1]. В работе [2] была предложена обобщённая модель параметрического резонанса Матъе. Уравнение в этой модели содержало в правой части дробный оператор дифференцирования порядка $1 < \beta < 2$ по времени. Параметр β определял долю разрешенных состояний колебательной системы во фрактальной среде. Было получено решение модели в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Эта работа является логическим продолжением работы [2] и направлена на исследование с помощью диаграмм Стретта-Айнса решения обобщенного уравнения Матъе.

Необходимо отметить, что в работе [3] рассматривалось уравнение Матъе с «фрактальным трением» и решение его исследовались в областях устойчивости или неустойчивости.

Исследуем области неустойчивости параметрического резонанса для следующего обобщенного уравнения Матъе

$$\partial_{0t}^{\beta} u(\tau) + [\delta + \xi \cos(\omega t)] u(t) = 0, t \in [0, T]. \quad (1)$$

Здесь для простоты исследования взята функция $\cos(\omega t)$, а в работе [2] в уравнении (1) была рассмотрена специальная функция $\cos_{\alpha}(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ – обобщенный косинус с параметром $1 < \alpha < 2$, который при значении параметра $\alpha = 2$ совпадает с обычным косинусом, т.е. $\cos(\omega t)$. Дробная производная в (1) имеет смысл Капуто порядка $1 < \beta < 2$. Параметры δ, ξ – константы.

Если положить в уравнении (1) $\xi = 0$ и $\delta = \omega^{\alpha}$, то оно переходит в известное уравнение дробного осциллятора, которое подробно исследуется в работе [4].

Уравнение (1) представляет собой обобщение на случай фрактальной среды классического уравнения Матъе, которое описывает параметрические возбуждения колебаний в механических системах, а также связанное с ним явление параметрического резонанса – возрастания амплитуды колебаний.

ДИАГРАММЫ СТРЕТТА-АЙНСА

Рассмотрим дифференциальное уравнение в дробных производных (1) при $\omega = 1$

$$\partial_{0t}^{\beta} u(\tau) + [\delta + \xi \cos(t)] u(t) = 0, t \in [0, T]. \quad (2)$$

Определим, при каких условиях, существует параметрический резонанс или не существует. Для этого в $\delta - \xi$ плоскости необходимо определить области устойчивости и неустойчивости решения уравнения (1) или еще говорят построить диаграммы Стретта-Айнса. Как правило, в области неустойчивости существует параметрический резонанс, который приводит к возрастанию амплитуды колебаний.

Оценим параметр δ . Рассмотрим производную дробного порядка в левой части (2):

$$\partial_{0t}^{\beta} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{u''(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}} = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} u''(t-v) dv. \quad (3)$$

Воспользуемся методом гармонического баланса для уравнения (2), будем искать в виде гармонического ряда [3]:

$$u(t) = A \cos\left(\frac{t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2}\right). \quad (4)$$

Подставляем решение (4) в выражение (3), получим:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} u''(t-v) dv = -\frac{1}{4\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} A \cos\left(\frac{t-v}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t-v}{2}\right) dv.$$

Учитывая, что

$$\cos\left(\frac{t-v}{2}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{v}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{t-v}{2}\right) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{v}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right),$$

приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} -\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} A \cos\left(\frac{v}{2}\right) - B \sin\left(\frac{v}{2}\right) dv - \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4\Gamma(2-\beta)} \int_0^t v^{1-\beta} A \sin\left(\frac{v}{2}\right) + B \cos\left(\frac{v}{2}\right) dv = \\ = -\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4\Gamma(2-\beta)} [AI_s - BI_c] - \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4\Gamma(2-\beta)} [AI_c + BI_s] \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_s = 2^{2-\beta} \int_0^{\frac{t}{2}} w^{1-\beta} \sin(w) dw, I_c = 2^{2-\beta} \int_0^{\frac{t}{2}} w^{1-\beta} \cos(w) dw \quad (6)$$

Известно, что при $t \rightarrow \infty$ интегралы (6) можно оценить следующим образом:

$$I_s = 2^{2-\beta} \int_0^{\infty} w^{1-\beta} \sin(w) dw = 2^{2-\beta} \Gamma(2-\beta) \cos((\beta-1)\pi/2) \quad (7)$$

$$I_c = 2^{2-\beta} \int_0^{\infty} w^{1-\beta} \cos(w) dw = 2^{2-\beta} \Gamma(2-\beta) \sin((\beta-1)\pi/2)$$

Подставляя (7) в (5), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2^\beta} [A \sin((\beta-1)\pi/2) - B \cos((\beta-1)\pi/2)] - \\ -\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2^\beta} [A \cos((\beta-1)\pi/2) + B \sin((\beta-1)\pi/2)] \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) и (4) в (1), после некоторых преобразований получим формулу:

$$\delta = \frac{1}{2^\beta} \sin((\beta - 1)\pi/2) \pm \frac{1}{2^{\beta+1}} \sqrt{2^{2\beta} \xi^2 - 4 \cos^2((\beta - 1)\pi/2)} \quad (9)$$

Если в формуле (9) положить $\beta = 2$, получим известное соотношение для классического параметрического резонанса Матье.

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{\xi}{2} \quad (10)$$

На рис. 1 в качестве примера построена диаграмма Стретта-Айнса согласно формуле (10).

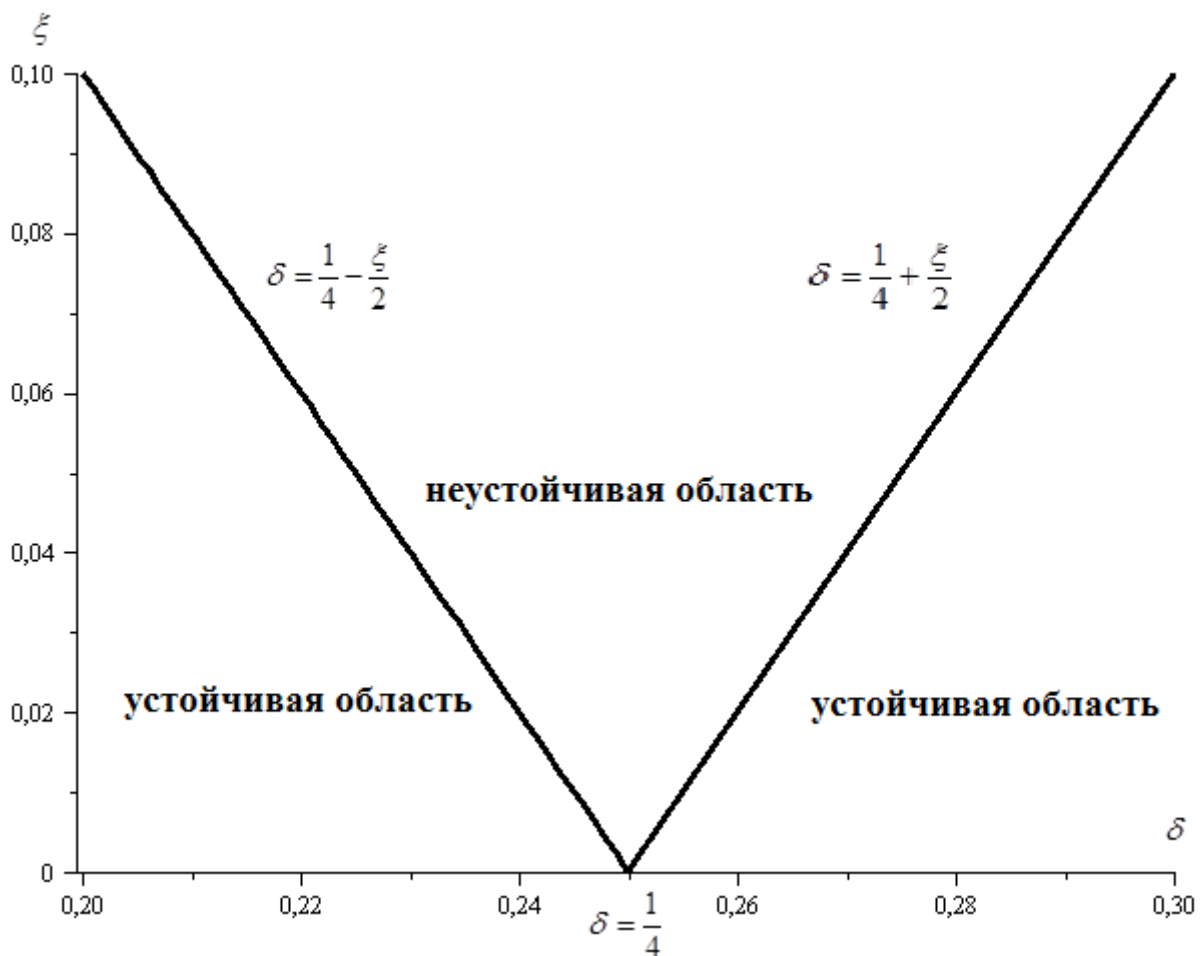


Рис. 1. Диаграмма Стретта-Айнса для соотношения (10)

Можно заметить, что в выражении (9) накладывається ограничение на параметр ξ . Значения этого параметра должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\xi \geq \frac{\cos((\beta - 1)\pi/2)}{2^{\beta-1}} \quad (11)$$

На рис. 2 показана область значения параметра согласно условию (11).

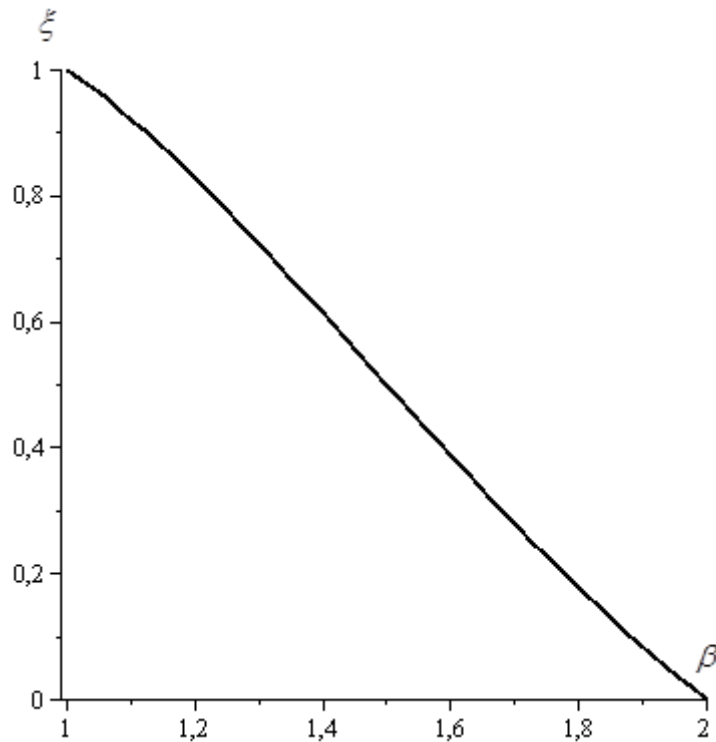


Рис. 2. Кривая, определяющая ограничения на параметр ξ

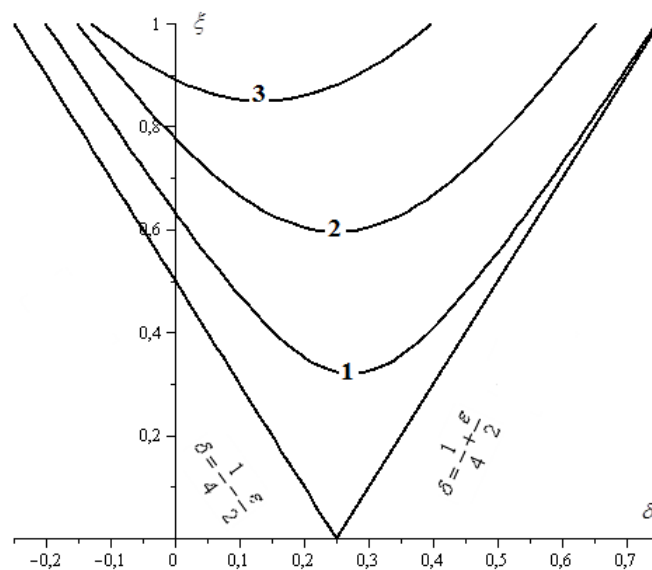


Рис. 3. Диаграмма Стретта-Айнса для выражения (10). Кривые построены в зависимости от параметра β : 1 – $\beta = 1,8$; 2 – $\beta = 1,6$; 3 – $\beta = 1,2$

Проведем визуализацию результатов исследования решения уравнения (1). Согласно проведенному ранее анализу было получено выражение (10). Далее приведена его визуализация.

Из рис. 3 видно, что при уменьшении параметра изменяется вид кривых, т.е. изменяются границы областей устойчивости и неустойчивости. Область неустойчивости сужается при значениях параметра $\beta \rightarrow 1$, поэтому вероятность появления эффекта параметрического резонанса уменьшается.

На рис. 4 приведена поверхность, построенная согласно соотношению (9) в зависимости от параметров α, δ, ξ .

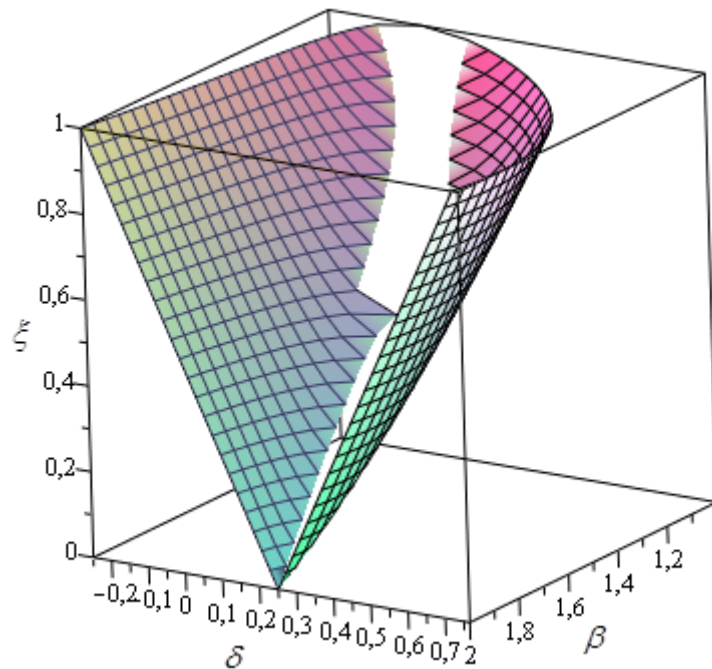


Рис. 4. $\alpha - \delta - \xi$ - поверхность, построенная согласно выражению (10)

Видно, что есть область на этой поверхности, на которой значения параметра δ не определены, это обусловлено выражением (11).

Анализ решения уравнения (1) показал, что при изменении параметра δ сужается область неустойчивости, а так же параметр ξ имеет ограничения (11).

Границы областей устойчивости и неустойчивости диаграммы Стретта-Айнса можно уточнить, если рассматривать решение (4) для более высоких гармоник, но это приведет к определенным вычислительным трудностям.

В качестве примера приведем рис. 5 при значении параметра $\beta = 2$, диаграмму Стретта-Айнса устойчивых (S) и неустойчивых (U) областей для уравнения Матье первых трех резонансов [5].

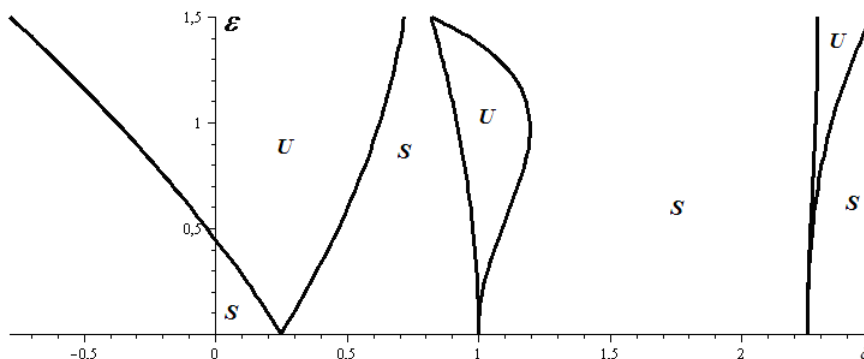


Рис. 5. Диаграмма Стретта-Айнса для уравнения Матье

Согласно этой диаграмме, можно определить при каких значениях параметров δ и ξ возникает параметрический резонанс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование решения с помощью диаграммы Стретта-Айнса показали, что существуют области неустойчивости параметрического резонанса, причем при уменьшении параметра β эти области сужаются.

Надо отметить, что в работе [6] авторы рассмотрели уравнение дробного осциллятора с внешним стабилизирующим инерциальным воздействием. Интересно было бы рассмотреть уравнение (1) с учетом внешней силы согласно этой работы, а потом перейти к рассмотрению уравнения (1) со случайной внешней силой.

Библиографический список

1. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – М. – Ижевск: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2011. – 568 с.
2. Паровик Р.И. Обобщенное уравнение Матье // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2011. – № 2 (3). – С. 12–17.
3. Rand R.H., Sah S.M., Suchrsky M.K. Fractional Mathieu equation // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. – 2010. – Vol. 15. – P. 3254–3262.
4. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М.: Наука, 2006. – 173 с.
5. Sinha S.C., Chou C.C., Denman H.H. Stability analysis of systems with periodic coefficients: an approximate approach // Journal of Sound and Vibration. – 1979. – Vol. 64 (4). – P. 515–527.
6. Афанасьев В.В., Данилаев М.П., Польский Ю.Е. Стабилизация фрактального осциллятора инерциальными воздействиями // Письма в ЖТФ. – 2010. – Т. 36. – Вып. 7. – С. 1–6.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 5.08.2012