Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (3). С. 5–11

Математика
Mathematica

УДК 519.71

О СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЧЕТКОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Горюшкин В.А.

Московский авиационный технологический институт (МАТИ - «РГТУ») имени К.Э.Циолковского, 121552, г. Москва, ул. Оршанская, 3

E-mail: msu28@bk.ru

Рассмотрены системы с нечетким управлением, вопросы анализа устойчивости и синтеза нечетких регуляторов. Рассмотрен способ синтеза стабилизирующего управления для нелинейных динамических систем с неопределенностью при помощи нечетких моделей Takagi–Sugeno. Даны условия асимптотической устойчивости систем с нечетким управлением на основе метода функций Ляпунова.

Ключевые слова: нелинейные системы с нечетким управлением, нечеткие модели Takagi–Sugeno, нечеткие системы с неопределенностями, функция Ляпунова, устойчивость, нечеткий регулятор, линейные матричные неравенства

MSC 93C42

ON STABILIZING CONTROLLER DESIGN FOR FUZZY SYSTEM WITH UNCERTAINTY

V.A. Goryushkin

MATI» - Russian State University of Aviation Technology, 121552, Orshanskaya st., 3, Moscow, Russia

E-mail: msu28@bk.ru

This paper addresses fuzzy control systems, asymptotically stability analysis and fuzzy controllers design. A stabilizing control design method for nonlinear dynamical systems with uncertainties based on Takagi-Sugeno fuzzy models is discussed. The paper proposed asymptotic stability sufficient conditions for fuzzy control systems via Lyapunov's second method.

Key words: nonlinear fuzzy control systems, Takagi-Sugeno fuzzy models, fuzzy systems with uncertainties, fuzzy Lyapunov function, stability, fuzzy controller, linear matrix inequalities

Введение

Задачи управления, в которых исходные данные являются ненадежными, неполными, слабо формализованными, встречаются в различных отраслях техники, промышленности, экономики, медицины [1]–[3]. В таких задачах эволюция системы происходит при наличии разнообразных факторов, известных неточно. Управление в этих системах может быть реализовано специальными логическими регуляторами, с помощью которых можно управлять статическими и многими динамическими объектами. Такие нечеткие системы управления находят многочисленные приложения в промышленности, в управлении движением транспорта, в управлении подъемными кранами, лифтами, роботами-манипуляторами, в управлении технологическими процессами, в нечетком управлении профессиональным риском повреждения здоровья и т. п. [2]-[5]. При этом, согласно промышленным нормативам, часто требуется обосновать устойчивость предлагаемой системы управления. Другими словами, требование устойчивости системы управления с входящим в нее регулятором рассматривается как необходимое условие для использования системы управления. В частности, когда системы управления связаны с безопасностью людей (стабилизация полета самолета, космической станции и т.п.), управляют дорогостоящим оборудованием или сложным производственным процессом, подверженным потере устойчивости, проверка устойчивости систем управления, в том числе систем управления с неполной информацией, расценивается как проблема критической важности.

К настоящему времени имеется ряд достаточно успешно работающих методов проверки устойчивости систем управления с неполной информацией [5]–[7]. Однако многие из этих методов строгого обоснования устойчивости системы не дают, а обеспечивают лишь возможность проверки ее работоспособности для определенных случаев, применительно к конкретным условиям. Эффективным методом анализа стабилизации рассматриваемых систем с неполной информацией, позволяющим получить строгое математическое обоснование устойчивости, является, в частности, метод функций Ляпунова.

Настоящая статья является продолжением работы [2], в которой расмотрены некоторые аспекты устойчивости нечетких систем.

Построение нечеткой модели

Первым шагом при синтезе регулятора является построение системы, описывающей динамику процесса управления. Эта система включает в себя все существенные характеристики процесса. Такая система слишком сложна для использования ее при синтезе регулятора. Общий подход к синтезу системы управления заключается в использовании упрощенной системы для построения регулятора. Упрощенная система представляет собой упрощенный вариант исходной системы и обычно пренебрегает высокочастотной динамикой объекта. Таким образом, при синтезе необходимо совладать с неполнотой математической модели процесса управления. Для учета неопределенностей моделирования в настоящей работе рассмотрено использование регулятора, состоящего из двух частей. Первая часть стабилизирует модель объекта, которая не содержит неопределенностей, возникающих при моделировании. Роль второй части регулятора заключается в избавлении от неопределенностей, возникающих при моделировании. В обоих случаях используется методика управления с обратной связью.

Нечеткую систему *Takagi-Sugeno* [4, 5] можно построить, если имеется локальное описание требующей управления динамической системы в терминах локальных линейных моделей

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, \ldots, r,$$

где вектор состояния $x(t) \in R^n$, вход управления $u(t) \in R^m$, а матрицы A_i и B_i имеют соответствующую размерность. Затем эта информация соединяется с имеющимися правилами ЕСЛИ-ТО, в которых i-е правило имеет вид

Правило i:

ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_{i1} и ... и $z_p(t)$ есть M_{ip},

ТО $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$,

где M_{ij}, $j = 1, \ldots, n$ – j-е нечеткое множество i-го правила. Пусть $M_{ij}(x_j(t))$ – функция принадлежности нечеткого множества M_{ij} и пусть

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(x_j(t)), \; h_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} w_i(x(t))}, \forall t$$

Тогда при заданной паре $(x(t), u(t))$ получающаяся модель нечеткой системы записывается как весовое среднее локальных моделей и имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} w_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} w_i(x(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(A_i x(t) + B_i u(t)) = \\ = \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) A_i\right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i\right) u(t) = A(h)x + B(h)u,\end{gathered} \tag{1}$$

где при $i = 1, \ldots, r$

$$h_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} w_i(x(t))}.$$

Заметим, что при $i = 1, \ldots, r$

$$h_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) = 1, \quad h = (h_1, h_2, \ldots, h_r)^T \in [0, 1]^r.$$

Для получения упрощенной модели полная модель процесса соединяется с его лингвистическим описанием. В данной работе рассмотрены полные модели, которые могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = f(x) + L(x)(u + \xi(t, x)), \tag{2}$$

где $f : R^n \to R^n$, $L : R^n \to R^{n \times m}$, а векторозначная функция $\xi(t, x)$ представляет неопределенности модели. Единственная информация, доступная нам об этих неопределенностях – их границы. Далее всюду предполагается, что представляющая неопределенности системы $\xi(t, x)$ ограничена неотрицательной функцией $\mu = \mu(t, x)$, т.е.

$$\|\xi(t,\, x)\|_p \le \mu(t,\, x),$$

где $\|\cdot\|_p$ означает p-норму вектора. Таким же образом, как и управление ξ влияет на динамику системы посредством входной матрицы $L(x)$. Соответствующая полной модели (2) нечеткая упрощенная модель имеет вид

$$\dot{x} = A(h)x + B(h)(u + \xi(t,\, x)).$$

Непосредственно с помощью метода Ляпунова доказывается, что достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ нечеткой системы $\dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(x(t))A_i x$, где $h_i(x(t)) \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) = 1$ состоит в том, что существует симметричная положительно определенная матрица P такая, что для $i = 1, \ldots, r$

$$A_i^T P + PA_i < 0. \tag{3}$$

Заметим, что если все A_i, $i = 1, \ldots, r$ в нечеткой модели $\dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(x(t))A_i x$ гурвицевы и существует симметричная положительно определенная матрица P такая, что условия (3) выполнены, то сумма матриц $A_i + A_j$ для любых $i, j = 1, \ldots, r$ также гурвицева.

Действительно, пусть $A_i^T P + PA_i = -R_i$, $A_j^T P + PA_j = -R_j$, где $R_i = R_i^T > 0$ и $R_j = R_j^T > 0$. Складывая, получаем $\left(A_i^T + A_j^T\right)P + P\left(A_i + A_j\right) = -\left(R_i + R_j\right)$. Поскольку $P = P^T > 0$ и $R_i = R_i^T > 0$, $R_j = R_j^T > 0$, то симметричные матрицы $\left(R_i + R_j\right)$ для любых $i, j = 1, \ldots, r$ также положительно определены. Следовательно, по теореме Ляпунова матрицы $A_i + A_j$ гурвицевы.

Таким образом, если существуют i и j такие, что матрица $A_i + A_j$ не является гурвицевой, то не существует и положительно определенной матрицы P такой, что $A_i^T P + PA_i < 0$ при $i = 1, \ldots, r$, т.е. это условие является достаточным для не существования общей матрицы P, удовлетворяющей (3).

Устойчивость нечетких моделей и синтез стабилизирующего регулятора

Получим теперь достаточное условие асимптотической устойчивости нечеткой модели, заданной в виде (1) с помощью обратной связи

$$u = -\sum_{j=1}^{r} h_j(x(t))F_j x.$$

Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\left(A_i - B_i F_j\right)x. \tag{4}$$

Предположим, что матрицы коэффициентов усиления F_i выбраны так, что матрицы

$$A_i - B_i F_i, \quad i = 1, \ldots, r$$

являются гурвицевыми. Пусть $G_{ij} = \left(A_i - B_i F_j\right) + \left(A_j - B_j F_i\right)$ при $i < j \le r$.

Предположим также, что существует положительно определенная матрица P такая, что выполнены условия $(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, r$. Представим эти неравенства в виде

$$(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) = -R_i, \quad i = 1, \ldots, r$$

где каждая R_i является симметричной положительно определенной. Пусть λ_i означает наименьшее собственное значение R_i. Поскольку $R_i = R_i^T > 0$, то $\lambda_i > 0$ при $i = 1, \ldots, r$.

Пусть $G_{ij}^T P + P G_{\overline{ij}}^{=} - R_{ij}$, $i < j \le r$. Поскольку $R_{ij} = R_{ij}^T$, то собственные значения R_{ij} являются действительными. Пусть λ_{ij} означает наименьшее собственное значение R_{ij}.

Теорема 1. *Пусть все $(A_i - B_i F_i)$, $i = 1, \ldots, r$ являются гурвицевыми и существует симметричная положительно определенная матрица P такая, что выполнены условия $(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, r$. Тогда замкнутая нечеткая модель (4) асимптотически устойчива, если матрица*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12}/2 & \ldots & \lambda_{1r}/2 \\ \lambda_{12}/2 & \lambda_2 & & \lambda_{2r}/2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1r}/2 & \lambda_{2r}/2 & \ldots & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

положительно определена.

Доказательство. В качестве функции Ляпунова для замкнутой системы (4) возьмем $V = V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ Найдем производную V по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P \dot{x} = 2x^T P \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) \left(A_i - B_i F_j\right) x \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) \left(\left(A_i - B_i F_j\right)^T P + P\left(A_i - B_i F_j\right) \right) x = \\ &= -\sum_{i=1}^{r} h_i^2(x(t)) x^T R_i x - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j>i}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T R_{ij} x. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что для любой симметричной матрицы $M = M^T$ выполнено $\lambda_{\min}(M) \|x\|^2 \le x^T M x$, где $\lambda_{\min}(M)$ – наименьшее собственное значение M. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le -\left(\sum_{i=1}^{r} h_i^2(x(t)) \lambda_i + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j>i}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) \lambda_{ij} \right) \|x\|^2 = \\ &= -\left((h_1, h_2, \ldots, h_r) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12}/2 & \ldots & \lambda_{1r}/2 \\ \lambda_{12}/2 & \lambda_2 & & \lambda_{2r}/2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1r}/2 & \lambda_{2r}/2 & \ldots & \lambda_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_r \end{pmatrix} \right) \cdot \|x\|^2 = \\ &= -\left(h^T \Lambda h\right) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если матрица из условия теоремы положительно определена, то производная функции Ляпунова отрицательна. Доказательство закончено. □

Теперь воспользуемся методом Ляпунова для синтеза нечеткого управления динамических систем с неопределенностью вида (2). Для того, чтобы избавиться от неопределенности ξ и получить условия асимптотической устойчивости системы, применим следующий способ построения стабилизирующего управления. Синтез стабилизирующего управления u разделим на две части: $u = u_c + u_H$. Сначала строим часть u_c в виде

$$u_c = -\sum_{j=1}^{r} h_j(x(t)) F_j x \tag{5}$$

так, чтобы система $\dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{r} h_i(x(t))\, h_j(x(t)) \left(A_i - B_i F_j\right) x$ была асимптотически устойчивой в целом и существовала общая матрица P удовлетворяющая условиям $(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0$ и $G_{ii}^T P + PG_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, r$. Система (2) с управлением (5) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} = &\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) A_i x - \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i \left(\sum_{j=1}^{r} h_j(x(t)) F_j x\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i (u_2 + \xi) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))\, h_j(x(t)) \left(A_i - B_i F_j\right) x + \\ &+ \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i (u_c + \xi)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Затем строим регулятор u_H для того, чтобы избавиться от неопределенности ξ. В результате система (2) с управлением $u = u_c + u_H$ является асимптотически устойчивой в целом. Вид регулятора u_H определяется следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть заданное для системы (2) управление вида (5) таково, что существует общая для всех подсистем матрица P, удовлетворяющая условиям*

$$(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

и пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)^T = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i^T P x$. Тогда замкнутая система с управлением $u = u_c + u_H$, где $u_c = -\mu_q \nabla \|z\|_p$, $p \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, является асимптотически устойчивой для любой неопределенности ξ такой, что $\|\xi\|_q \leq \mu_q$.

Доказательство. Предположим, что u_c, определяемое в виде (5) и такое, что выполняются условия $(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0$ и $G_{ii}^T P + PG_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, r$ уже построено. Управляемая с помощью u_c система (2) принимает вид (6), т.е.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))\, h_j(x(t)) \left(A_i - B_i F_j\right) x + \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i (u_c + \xi)\,.$$

Покажем теперь, что $V = x^T P x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы, где $P = P^T > 0$ удовлетворяет условиям $(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0$ и $G_{ii}^T P + PG_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, r$. Для этого мы вычислим $\dot{V}(t)$ вдоль траекторий замкнутой системы и покажем, что эта производная отрицательна. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = 2x^T P &\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))\, h_j(x(t)) \left(A_i - B_i F_j\right) x + \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) B_i (u_c + \xi)\right) < \\ &< -2\mu_q z^T \nabla \|z\|_p + 2z^T h \leq -2\mu_q \|z\|_p + 2\left|z^T h\right|\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Применяя к (7) неравенство Гёльдера $\left|v^T w\right| \le \|v\|_p \|w\|_q$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, получаем

$$\dot{V}(t) < -2\mu_q \|z\|_p + 2\|z\|_p \|h\|_q < -2\mu_q \|z\|_p + 2\|z\|_p \mu_q < 0.$$

Следовательно, согласно теореме Ляпунова, замкнутая система асимптотически устойчива. □

Заключение

Таким образом, для учета неопределенностей моделирования использован регулятор, состоящего из двух частей. Первая часть стабилизирует модель объекта, которая не содержит неопределенностей, возникающих при моделировании. Роль второй части регулятора заключается в избавлении от неопределенностей, возникающих при моделировании. В обоих случаях используется методика нечеткого управления с обратной связью. Полученные условия устойчивости могут быть использованы в задачах совершенствования технологических процессов и инженерных систем нечеткого управления. Для более полного применения построенных регуляторов к реальным техническим и физическим системам, необходимы дальнейшие исследования, направленные на ограничение влияния внешних возмущений, разрозненных неопределенностей, а также недоступных переменных состояния.

Литература

1. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. — 798 с.
2. Driankov D., Hellendorm H., Reich Frank M. An introduction to fuzzy control. Berlin: Springer, 1996.
3. Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М.: Физматлит, 2001.
4. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. – 1985. – Vol. SMC-15, Jan/Feb. – P. 116—132.
5. Tanaka K., Wang H.O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.
6. Горюшкин А.В. Об устойчивости нечетких систем управления // Вестник КРАУНЦ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – №2(1.) – С.17–25.
7. Sugeno M., Kang G.T. Structure identification of fuzzy model // Fuzzy Sets Syst. – 1998. – V. 28. – P. 15—33.
8. Tanaka K., Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems // Fuzzy Sets and Systems. – 1992. – №45(2). – P. 135-–156..
9. Wang H.O., Tanaka K., Griffin M.F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 1996. – 4(1) – P. 14–23.
10. Feng G., Cao S.G., Rees N.W., Chark C.K. Design of fuzzy design control systems with guaranteed stability // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – 85(1) – P. 1—10.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.11.2011