Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (2). С. 31–36

Математическое моделирование
Mathimatical simulation

517.958:539.3(3)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ЗОН ДИЛАТАНСИИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С КОМБИНАЦИЕЙ ДВОЙНЫХ СИЛ

Боброва М.Е., Пережогин А.С.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: drew72156@yandex.ru

Рассмотрена модель зон дилатансии в поле напряжений двойных сил в однородном, изотропном, упругом полупространстве. Выполнены расчеты компонент тензора напряжений и критерия дилатансии. Сопоставлены уровни относительных деформаций с областями дилатансии горных пород.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, дилатансия, модель Миндлина, деформации земной коры

MSC 74B05:86-04

MODELING OF STRESS FIELD AND DILATANCYS ZONES IN ELASTIC HALFSPACE OF DOUBLE FORCE

Bobrova M.E., Perezhogin A.S.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7

E-mail: drew72156@yandex.ru

A model of the dilatancy's zones in the stress field of the double forces in a homogeneous, isotropic elastic half-space was considered. Calculations of the stress tensor components and the criterion of dilatancy were perfomed. Relative defomations of Earth crust were interconnected with zone of dilatancy.

Key words: stress field, dilatancy, the problem of Mindlin, deformation of Earth crust

Введение

В сейсмоактивных зонах тектонические силы, возникающие на стыке блоков земной коры, формируют области повышенных тектонических напряжений, где процессы раскрытия трещин могут приводить к разрушению среды. Такого рода изменения в горных породах большинство сейсмологов связывают с состоянием нелинейного разуплотнения среды за счет образования трещин сдвига при достижении касательных напряжений некоторого порога. Поля напряжений и деформаций горных пород влияют на процессы в различных геофизических полях. В частности, уровень воды в скважинах, повышение интенсивности выделения подпочвенного радона, аномалии в геоакустических сигналах, электрическом и магнитном полях являются следствием изменения напряженно-деформированного состояния среды. Физико-математической моделью, которая может связывать все эти процессы, является модель зон дилатансии, разуплотнения горных пород за счет доминирования касательных напряжений над сжатием. В случае простой сосредоточенной силы зоны дилатансии исследованы в работе [1]. Моделирование в случае двойной силы направленной параллельно свободной границе проведено в работе [3].

В настоящей работе с помощью математического моделирования получено пространственное распределение зон дилатансии для комбинации трех двойных сил, описывающих точечный центр расширения [5]. В зависимости от параметров точечного источника происходит образование двух зон дилатансии: «очаговой» в окрестностях источника и «пограничной» около свободной поверхности. Исследовано поведение «пограничной» зоны при изменении интенсивности двойных сил и глубины источника напряжений. Так как прямое измерение напряжений в земной коре невозможно, то для практического обнаружения областей дилатансии будет полезно сопоставление критерия дилатансиии с уровнем относительных деформаций земной коры. Представленные результаты моделирования дают возможность оценки размеров зон дилатансии по уровню относительных деформаций горных пород. Сопоставления результатов моделирования зон дилатансии и областей относительных деформаций при одних и тех же параметрах модели показывают, что максимальные сдвиговые деформации порядка 10^{-5} соответствуют областям нелинейного разуплотнения.

Постановка задачи

Рассмотрим модель земной коры в приближении упругого однородного изотропного полупространства. Полупространство совпадает с положительным направлением оси OZ. Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} и вектор смещения u_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

где X_i – двойная сила, λ, μ – коэффициенты Ламэ, δ_{ij} – символ Кронекера. Граничным условием для системы (1 - 3) является свободная граница z = 0: $\sigma_{zx}|_{z=0} = \sigma_{zy}|_{z=0} = \sigma_{zz}|_{z=0} = 0$.

Источник в виде комбинации трех двойных сил помещен в точку c на оси OZ (рис. 1). Интенсивность действия двойных сил одинакова для каждой из них. Общая интенсивность равна $_0$. Для нахождения поля напряжений можно воспользоваться представлением Галеркина. Компоненты тензора напряжений в упругом изотропном полупространстве могут быть выражены через частные производные вектора Галеркина [2]:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\Delta X + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\operatorname{div}\mathbf{H},\\
\sigma_{yy} &= 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\Delta Y + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{div}\mathbf{H},\\
\sigma_{zz} &= 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial z}\Delta Z + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\operatorname{div}\mathbf{H},\\
\sigma_{yz} &= (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta Y + \frac{\partial}{\partial y}\Delta Z\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\operatorname{div}\mathbf{H},\\
\sigma_{zx} &= (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta Z + \frac{\partial}{\partial z}\Delta X\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\operatorname{div}\mathbf{H},\\
\sigma_{xy} &= (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta X + \frac{\partial}{\partial x}\Delta Y\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\operatorname{div}\mathbf{H},
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где X,Y,Z – координаты вектора Галеркина $\mathbf{H}$; $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xx},\sigma_{zz},\sigma_{yz},\sigma_{zx},\sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; Δ – оператор Лапласа, ν – коэффициент Пуассона.

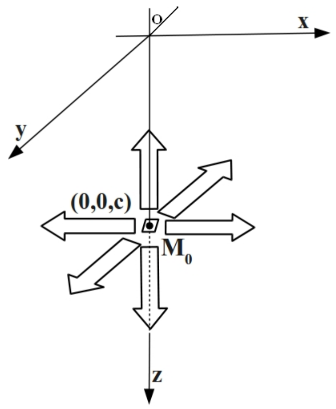

Рис. 1. Направление действия двойных сил X_i в однородном изотропном полупространстве. M_0 – интенсивность двойных сил.

Используя 4 и суммы векторов Галеркина для двойных сил без момента [4] получены явные решения для тензора напряжений с помощью пакета аналитических вычислений Maxima [7].

В работе [1] предложен критерий возникновения зон дилатансии в поле напряжений горных пород земной коры:

$$D_\tau = \tau - \alpha(P + \rho g z) - S \geq 0, \qquad (5)$$

где $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\left((\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6\left(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ – интенсивность касательных напряжений, $P=-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{3}$ – давление, α – коэффициент внутреннего трения, ρ – плотность породы, g – ускорение свободного падения, z – координата точки, Y – сцепление породы. В зонах, где $D_\tau \geq 0$, касательные напряжения доминируют над сжимающими напряжениями, и развивается дилатансия. Те зоны, где $D_\tau < 0$, являются зонами без нелинейного разуплотнения среды.

Для сопоставления с уровнем относительных деформаций в областях дилатансии выполнены расчета максимальных касательных напряжений. Для выделения не только критических, но и всех других возможных уровней напряжений, воспользуемся величиной $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1-\sigma_2|,|\sigma_2-\sigma_3|,|\sigma_3-\sigma_1|)/2$ – критерием максимальных касательных напряжений, где $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ – главные значения тензора напряжений. С помощью значения максимального касательного напряжения определим относительные деформации сдвига:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{\max} \tag{6}$$

В упругом полупространстве определим следующие уровни сдвиговых деформаций $\varepsilon_{\max}$ $10^{-8}-10^{-7};10^{-7}-10^{-6};10^{-6}-10^{-5};10^{-5}<$. Значение 10^{-8} величины ε_{max} соответствует уровню приливной деформации земной коры, а значение больше чем 10^{-5} – образованию области разуплотнения и достижению предела прочности пород. При численном моделировании установим уровень сдвиговых деформаций соответствующих области дилатансии.

Численное моделирование

В случаях действия простой силы и двойных сил происходит образование двух зон дилатансии – «очаговой» в окрестностях приложения силы и «пограничной» в слое около свободной поверхности [1, 3]. Исследуем формирование зон дилатансии в зависимости от глубины и интенсивности рассматриваемого сосредоточенного источника.

Для того, чтобы представить форму зоны дилатансии, необходимо рассмотреть соответствующие сечения трехмерной области. На рис. 2 приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) для различных интенсивностей источника и его глубины. Использовались следующие параметры земной коры: ν=0.25, λ= $3.48\cdot10^{10}$ Па, μ=$3.48\cdot10^{10}$ Па, ρ=2900 кг/м^3, g=9.8 м/с^2, Y=$3\cdot10^6$ Па, α=0.5. Визуализация результатов моделирования выполнена с помощью пакета построения графиков gnuplot [6]. В связи с симметричностью решений поля напряжений сечение по OY будет выглядеть аналогично сечению по OX.

В случае с интенсивностью $M_0 = 5\cdot10^{20}$ Н·м на глубине c=10050 м видно, что «очаговая» зона дилатансии соединяется с «пограничной». Для заданной интенсивности и глубины источника размер области дилатансии на земной поверхности рис. (2, *б*) составляет десятки километров.

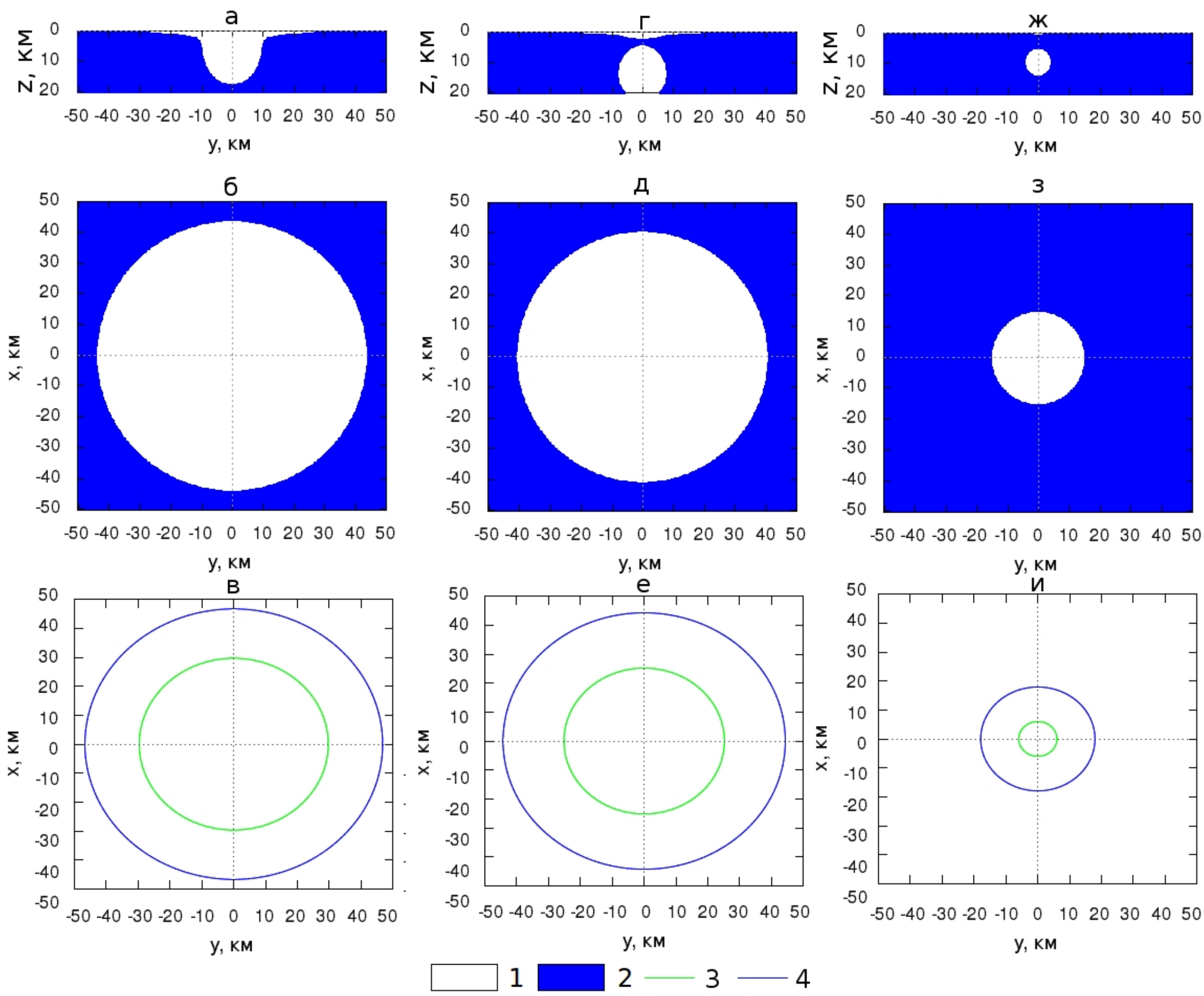

Рис. 2. Зона дилатансии в сечении x=0 (*а, г, ж*), на свободной поверхности z=0 (*б, д, з*); сдвиговые деформации z=0 (*в, е, и*). 1 – зона дилатансии, 2 – область без нелинейного разуплотнения среды, 3 – относительная деформация 10^{-4}, 4 – относительная деформация $3 \cdot 10^{-5}$.

На рис. (2, *г, д*) приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) для источника с интенсивностью $M_0 = 5 \cdot 10^{20}$ Н·м на глубине c=15050 м.

В этом случае «очаговая» зона дилатансии не соединяется с поверхностью. При этом на поверхности происходит образование «пограничной» зоны дилатансии. С увеличением глубины источника «пограничная» область пропадает и появляется лишь в окрестности источника напряжений в точке (0,0,15050). Рис, (2, *ж, з*) показывает результаты моделирования зон дилатансии по (5) на глубине c=10050 м при $M_0 = 5 \cdot 10^{19}$ Н·м. В этом случае зона дилатансии находится в области источника напряжений. Размер «пограничной» зоны незначительно отличается от размера «очаговой» зоны.

Результаты моделирования уровней относительных деформаций на рис. (2, *в, е, и*) показывают, что области дилатансии соответствуют уровню деформаций $3 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, обнаружение дилатансионных эффектов происходит при относительной деформации близкой к разрушительным значениям для горных пород порядка $10^{-5} - 10^{-4}$.

Заключение

Показано наличие области дилатансии на поверхности Земли для случая действия трех двойных сил. Протяженность «пограничной» зоны дилатансии в зависимости от интенсивности и глубины источника может составлять до десятков километров. «Пограничная» и «очаговая» зоны дилатансии могут соединяться между собой или не соединяться в зависимости от параметров модели. При этом связь между размерами зон дилатансии и параметрами модели - глубиной и интенсивностью источника, является нелинейной. При незначительном изменении этих параметров области нелинейного разуплотнения в приповерхностном слое земной коры могут не возникать.

Математическое моделирования поля деформаций показывает, что зоны дилатансии формируются при относительных деформациях порядка 10^{-5}. При выбранных параметрах горных пород получено, что уровень сдвиговых деформаций равен $3 \cdot 10^{-5}$. Все это дает возможно с помощью инструментальных средств наблюдений, например лазерного деформографа, определять накопление напряжений в горных породах, формирующих области дилатансии в сейсмоактивных регионах.

Литература

1. Алексеев А.С., Белоносов А.С., Петренко В.Е. О концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений с использованием интегрального предвестника // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности: Сб. науч. тр. ГЕОС. Вычислительная сейсмология. – 2001. – вып. 32. – С. 81–97.

2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 302 с.

3. Пережогин А.С., Шевцов Б.М. Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14. – № 3. – С. 48–58.

4. Mindlin R.D., Cheng D.H. Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid // Journal of Applied Physics. – Vol. 21. – 1950. – P. 926–930.

5. Okada Y. Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1992. – Vol. 82. – № 2. – P. 1018–1040.

6. http://www.gnuplot.info

7. http://maxima.sourceforge.net/ru

Поступила в редакцию / Original article submitted: 25.01.11