

УДК 517.958+517.927

## ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ПОЛОИДАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

**Г.М. Водинчар<sup>1,2</sup>, Л.К. Фещенко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

<sup>2</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, krutevalu@mail.ru

Доказывается ортогональность собственных полей спектральной задачи  $\operatorname{rot} \Delta \mathbf{S} + \lambda \operatorname{rot} \mathbf{S} = \mathbf{0}$  в пространстве полоидальных полей в сферической оболочке

Ключевые слова: спектральные задачи, сферическая оболочка, ортогональные поля

© Водинчар Г.М., Фещенко Л.К., 2011

MSC 47F05+57R25

## ORTHOGONAL SOLUTIONS OF A SPECTRAL PROBLEM IN THE CLASS OF POLOIDAL FIELD

**G.M. Vodinchar<sup>1,2</sup>, L.K. Feschenko<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

<sup>2</sup> Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, krutevalu@mail.ru

We prove the orthogonality of the eigenfields of the spectral problem  $\operatorname{rot} \Delta \mathbf{S} + \lambda \operatorname{rot} \mathbf{S} = \mathbf{0}$  in the space of the poloidal field in a spherical shell

Key words: spectral problem, the spherical shell, orthogonal field

© Vodinchar G.M., Feschenko L.K., 2011

## Введение

Модельное описание динамики вязкой несжимаемой жидкости в сферических оболочках играет большую роль в физике планет и звезд. Решение уравнения Навье-Стокса, описывающего подобные процессы, за исключение простейших случаев, можно получать только различными приближенными методами. Большую популярность при этом имеют методы, относящиеся к группе методов взвешенных невязок [1]. В этих методах искомое поле скорости жидкости раскладывается в линейную комбинацию стационарных бездивергентных полей с зависящими от времени амплитудами. Выбор системы полей для разложения можно сделать на основании различных соображений и одним из возможных подходов является использование для разложения полоидальной составляющей скорости собственных полей формулируемой ниже задачи (1).

При этом возникает важный для вычислительной устойчивости и качества аппроксимации вопрос об ортогональности используемых для разложения скорости базисных полей, исследуемый в настоящей работе.

## Ортогональность собственных полей

Пусть  $H_S$  – пространство полоидальных полей в сферической оболочке  $\Omega$  радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , нулевых на границе этой оболочки. Рассмотрим в  $H_S$  спектральную задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Delta \mathbf{S} + \lambda \operatorname{rot} \mathbf{S} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{S}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Явные выражения для собственных полей этой задачи и уравнение на собственные значения были получены в работе [2], поэтому приведем их здесь без вывода.

Если ввести сферическую систему координат с началом в центре оболочки, то собственными полями являются

$$\mathbf{S}_{knm} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (R_{kn}(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}),$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  определяет дискретизацию решений задачи (1) и ее спектра по радиусу, а индексы  $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $m = -n, \dots, n$  – дискретизацию по угловым переменным  $\theta$  и  $\varphi$ , т.е. по поверхности единичной сферы  $\mathcal{S}^2$ . Далее  $n$  и  $m$  будем называть сферическими индексами.

Здесь  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  – сферические гармоники, которые далее будем считать нормированными следующим образом:

$$\iint_{\mathcal{S}^2} |Y_n^m|^2 dS = 1,$$

а радиальные функции  $R_{kn}$  удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^2 R_{kn} + \lambda_{kn} \mathcal{L}_n R_{kn} &= 0, \\ R_{kn}(r_1) = R_{kn}(r_2) = \frac{dR_{kn}}{dr} \Big|_{r=r_1} = \frac{dR_{kn}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где оператор

$$\mathcal{L}_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2},$$

а  $\lambda_{kn}$  – положительные собственные значения.

Каждому собственному значению  $\lambda_{kn}$  соответствуют при этом  $2n+1$  линейно независимых собственных полей  $\mathbf{S}_{knm}$  при  $n=0, \pm 1, \dots, \pm n$ .

Рассмотрим теперь вопрос об ортогональности полей  $\mathbf{S}_{knm}$  в объеме оболочки.

**ТЕОРЕМА 1.** *Собственные поля спектральной задачи (1), отличающиеся хотя бы одним из сферических индексов, ортогональны относительно скалярного произведения, определяемого формулой*

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \iiint_{\Omega} \mathbf{p} \mathbf{q} dV.$$

**Доказательство.** Непосредственным вычислением легко установить, что в локальном сферическом базисе

$$\mathbf{S}_{knm} = \frac{R_{kn}}{r} n(n+1) Y_n^m \mathbf{e}_r + \left( \frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \nabla_s Y_n^m, \quad (3)$$

где векторный дифференциальный оператор

$$\nabla_s = \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_{knm}, \mathbf{S}_{k'n'm'} \rangle &= nn' (n+1) (n'+1) \int_{r_1}^{r_2} R_{kn} R_{k'n'} dr \iint_{\mathcal{S}^2} Y_n^m Y_{n'}^{m'} dS + \\ &+ \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \left( \frac{dR_{k'n'}}{dr} + \frac{R_{k'n'}}{r} \right) r^2 dr \iint_{\mathcal{S}^2} \nabla_s Y_n^m \nabla_s Y_{n'}^{m'} dS. \end{aligned} \quad (4)$$

В формуле (4) оба поверхностных интеграла при  $n \neq n'$  или  $m \neq m'$  равны нулю. Для первого это очевидно ввиду ортогональности сферических функций на единичной сфере, а для второго доказано, например в [3].

Таким образом,  $\langle \mathbf{S}_{knm}, \mathbf{S}_{k'n'm'} \rangle = 0$  при  $n \neq n'$  или  $m \neq m'$ .  $\square$

**Замечание.** В случае совпадения обоих сферических индексов доказательство ортогональности собственных полей  $\mathbf{S}_{knm}$  и  $\mathbf{S}_{k'nm}$  относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  сложнее. Учитывая нормированность сферических гармоник и равенство

$$\iint_{\mathcal{S}^2} (\nabla_s Y_n^m)^2 dS = n(n+1),$$

доказанное в [3], получим по формуле (4), что в этом случае

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_{knm}, \mathbf{S}_{k'nm} \rangle &= n^2 (n+1)^2 \int_{r_1}^{r_2} R_{kn} R_{k'n} dr + \\ &+ n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \left( \frac{dR_{k'n}}{dr} + \frac{R_{k'n}}{r} \right) r^2 dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку функции  $R_{kn}$  и  $R_{k'n}$  являются решениями спектральной задачи (2) и имеют различные (при  $k \neq k'$ ) собственные значения  $\lambda_{kn}$  и  $\lambda_{k'n}$ , то ортогональность  $\mathbf{S}_{knm}$  и  $\mathbf{S}_{k'nm}$  вытекает с учетом равенства (5) из следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть в пространстве  $C^2_{[r_1, r_2]}$  функций переменной  $r$ , задана спектральная задача

$$\mathcal{L}_n^2 w + \lambda \mathcal{L}_n w = 0, \quad (6)$$

$$w(r_1) = w(r_2) = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=r_1} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=r_2} = 0, \quad (7)$$

и определено скалярное произведение формулой

$$\langle u, v \rangle_1 = n^2 (n+1)^2 \int_{r_1}^{r_2} uv dr + n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) \left( \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \right) r^2 dr.$$

Тогда собственные функции соответствующие различным собственными значениями ортогональны.

**Доказательство.** Прежде всего распишем подробно формулу, определяющую скалярное произведение, раскрыв скобки во втором интеграле:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_1 = n^2 (n+1)^2 \int_{r_1}^{r_2} uv dr + n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} uv dr + n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} u \frac{dv}{dr} r dr + \\ + n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} v \frac{du}{dr} r dr + n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr} \frac{dv}{dr} r^2 dr. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем один из интегралов в (8), интегрируя по частям и используя краевые условия (7):

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} u \frac{dv}{dr} r dr = urv \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} v d(ur) = - \int_{r_1}^{r_2} vr du - \int_{r_1}^{r_2} vu dr = \\ = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr} vr dr - \int_{r_1}^{r_2} vu dr. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), получаем

$$\langle u, v \rangle_1 = n^2 (n+1)^2 \int_{r_1}^{r_2} uv dr + n(n+1) \int_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr} \frac{dv}{dr} r^2 dr. \quad (10)$$

Далее, интегрируя по частям, преобразуем второй интеграл в (10):

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr} \frac{dv}{dr} r^2 dr = r^2 \frac{du}{dr} v \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} v d \left( \frac{du}{dr} r^2 \right) = \\ = -2 \int_{r_1}^{r_2} vr \frac{du}{dr} dr - \int_{r_1}^{r_2} vr^2 \frac{d^2 u}{dr^2} dr. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь, подставив (11) в (10), получаем:

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{r_1}^{r_2} \left[ -n(n+1)r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} - n(n+1)2r \frac{du}{dr} + n^2(n+1)^2 u \right] v dr. \quad (12)$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{N}_n = -n(n+1)r^2 \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] = -n(n+1)r^2 \mathcal{L}_n.$$

Тогда, выражение в квадратных скобках в (12) равно  $\mathcal{N}_n u$  и

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{r_1}^{r_2} v \mathcal{N}_n u dr. \quad (13)$$

Домножая (6) на  $-n(n+1)r^2$  и вводя оператор  $\mathcal{M}_n = n(n+1)r^2 \mathcal{L}_n^2$ , запишем исследуемую спектральную задачу в виде:

$$\mathcal{M}_n u = \lambda \mathcal{N}_n u. \quad (14)$$

Определим теперь следующие функции:

$$g_0(r) = n^2(n+1)^2, \quad g_1(r) = n(n+1)r^2,$$

$$f_0(r) = -n^2(n+1)^2/r^2, \quad f_1(r) = 4n(n+1), \quad f_2(r) = n(n+1)r^2.$$

Тогда непосредственным вычислением легко показать, что операторы  $\mathcal{N}_n$  и  $\mathcal{M}_n$  можно представить в следующей стандартной форме при  $p = 1$ :

$$\mathcal{N}_n = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{d^k}{dr^k} \left( g_k(r) \frac{d^k}{dr^k} \right), \quad \mathcal{M}_n = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{d^k}{dr^k} \left( f_k(r) \frac{d^k}{dr^k} \right),$$

Спектральные задачи вида (14) с операторами такого вида рассматривались в [4]. Покажем, что задача (14) является самосопряженной по терминологии этого источника, т.е., что выполняются равенства:

$$\int_{r_1}^{r_2} (v \mathcal{N}_n u - u \mathcal{N}_n v) dr = 0, \quad \int_{r_1}^{r_2} (v \mathcal{M}_n u - u \mathcal{M}_n v) dr = 0. \quad (15)$$

Справедливость первого из этих равенств очевидно вытекает из (13), поскольку

$$\int_{r_1}^{r_2} (v \mathcal{N}_n u - u \mathcal{N}_n v) dr = \langle u, v \rangle_1 - \langle v, u \rangle_1 = 0.$$

Для интеграла во втором из равенств (15) применим преобразование Дирихле [4]:

$$\int_{r_1}^{r_2} (v \mathcal{M}_n u - u \mathcal{M}_n v) dr = \sum_{k=0}^2 \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k+s} \times$$

$$\times \left[ \frac{d^s u}{dr^s} \frac{d^{k-s-1}}{dr^{k-s-1}} \left( f_k \frac{d^k v}{dr^k} \right) - \frac{d^s v}{dr^s} \frac{d^{k-s-1}}{dr^{k-s-1}} \left( f_k \frac{d^k u}{dr^k} \right) \right] \Bigg|_{r_1}^{r_2}. \quad (16)$$

С учетом краевых условий (7) легко видеть, что все слагаемые двойной суммы в (16) нулевые, что и доказывает справедливость второго равенства (15).

Итак, спектральная задача (14) является самосопряженной. Тогда, для двух собственных функции  $u_1(r)$  и  $u_2(r)$ , соответствующих двум различным собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  справедливы равенства [4]:

$$\int_{r_1}^{r_2} u_1 \mathcal{N}_n u_2 dr = \int_{r_1}^{r_2} u_1 \mathcal{M}_n u_2 dr = 0,$$

Теперь, по формуле (13), получим  $\langle u_1, u_2 \rangle_1 = 0$ , что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

## Заключение

В работе доказана ортогональность системы собственных полей задачи (1). Это свойство делает систему собственных полей удобной для использования в качестве аппроксимирующей системы при приближенном решении уравнения Навье-Стокса в сферической оболочке спектральным методом.

## Литература

1. ФЛЕТЧЕР К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
2. ВОДИНЧАР Г.М., ШЕВЦОВ Б.М. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычисл. технологии. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 3–15.
3. CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. – N.-Y.: Dover Publ. Inc, 1981. – 654 p.
4. КОЛЛАТЦ Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.02.11