Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (2). С. 16–24

УДК 519.71

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Горюшкин

Московский авиационный технологический институт (МАТИ – РГТУ)
имени К.Э. Циолковского, 121552, г. Москва, ул. Оршанская, 3

E-mail: msu28@bk.ru

Найдены условия асимптотической устойчивости систем с нечетким управлением на основе использования квадратичной и нечеткой функций Ляпунова.

Ключевые слова: нечеткие модели Takagi–Sugeno, нечеткая функция Ляпунова, устойчивость, нечеткий наблюдатель, нечеткий регулятор

MSC 93C42

ON STABILITY OF FUZZY CONTROL SYSTEMS

V.A. Goryushkin

«MATI» - Russian State University of Aviation Technology. 121552, Orshanskaya st., 3, Moscow, Russia
E-mail: msu28@bk.ru

Some asymptotic stability conditions of fuzzy control systems via quadratic and fuzzy Lyapunov functions are considered.

Key words: Takagi-Sugeno fuzzy models, fuzzy Lyapunov function, stability, fuzzy observer, fuzzy controller

Введение

Важной задачей при исследовании систем управления, имеющих нелинейности и неопределенности, является задача определения состояния системы в зависимости от начальных данных. Для линейных систем эта задача решается построением линейного наблюдателя для наблюдаемой системы. В теории линейных систем одним из важнейших результатов является принцип разделения, состоящий в том, что построение регулятора и наблюдателя может быть выполнено раздельно вне зависимости от устойчивости замкнутой системы (см. [1, 2]).

В настоящей работе принцип разделения распространен на классы нелинейных систем с нечетким управлением. Кроме того, для этих классов найдены условия асимптотической устойчивости. Эти условия могут быть использованы в задачах совершенствования технологических процессов и технических систем нечеткого управления, а также для решения задачи безопасности функционирования процессов и систем.

При построении непрерывных моделей Takagi–Sugeno (см. [3]) используются нечеткие предикатные правила.Например, если $z_1(t)$ есть M_{i1} и … и $z_p(t)$ есть M_{ip},

$$\text{TO}\ \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots r, \end{cases}$$

где M_{ij} – нечеткое множество, r – число нечетких правил, $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор, $u(t) \in R^m$ – вектор входа, $y(t) \in R^q$ – вектор выхода, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{q \times n}$, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t))$ – вектор известных переменных посылок, которые могут быть функциями фазовых переменных, внешних возмущений или времени.

Нечеткие модели Takagi–Sugeno обладают высокими аппроксимационными свойствами. Увеличивая число n можно описать с высокой точностью нелинейные динамические процессы. Кроме этого, усредняющие свойства механизма вывода и специфический вид функций принадлежности позволяют сделать модели Takagi–Sugeno малочувствительными к погрешностям измерений.

Являясь нелинейными и непрерывными функциями входных переменных и параметров, нечеткие модели Takagi–Sugeno позволяют аналитически исследовать устойчивость нелинейных систем.

Примеры нечетких моделей

Одним из методов исследования устойчивости нечетких систем является метод линейных матричных неравенств, который используется для анализа устойчивости однородных непрерывных и дискретных нечетких систем. Удобство метода линейных матричных неравенств связано с возможностями его численной реализации в интегрированной среде MATLAB.

Для иллюстрации конкретных шагов по построению нечетких моделей рассмотрим два примера.

Пример 1. В нелинейной ситеме

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_1(t)x_2^4(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + (2 + x_2(t))\, x_1^3(t),$$

будем предполагать для простоты, что $x_1(t) \in [-1,\ 1]$ и $x_2(t) \in [-1,\ 1]$. Перепишем систему в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x_1(t)x_2^3(t) \\ (2+x_2(t))x_1^2(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$. Нелинейные члены $x_1(t)x_2^3(t)$ и $(2+x_2(t))x_1^2(t)$ обозначим как $z_1(t)$ и $z_2(t)$, т. е. $z_1(t) = x_1(t)x_2^3(t)$, $z_2(t) = (2+x_2(t))x_1^2(t)$. Тогда исходная система перепишется в виде

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & z_1(t) \\ z_2(t) & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Найдем теперь минимальное и максимальное значения $z_1(t)$ и $z_2(t)$ при условии, что $x_1(t) \in [-1,\ 1]$ и $x_2(t) \in [-1,\ 1]$. Очевидно, что

$$\min_{x_1(t),\, x_2(t)} z_1(t) = -1, \qquad \max_{x_1(t),\, x_2(t)} z_1(t) = 1,$$

$$\min_{x_1(t),\, x_2(t)} z_2(t) = 0, \qquad \max_{x_1(t),\, x_2(t)} z_2(t) = 3.$$

Таким образом, нелинейные члены $z_1(t)$ и $z_2(t)$ могут быть представлены в виде

$$z_1(t) = M_1^1(z_1(t)) \cdot 1 + M_1^2(z_1(t)) \cdot (-1)\,,$$

$$z_2(t) = M_2^1(z_2(t)) \cdot 3\, +\, M_2^2(z_2(t)) \cdot 0\,,$$

где

$$M_1^1(z_1(t)) + M_1^2(z_1(t)) = 1,$$
$$M_2^1(z_2(t)) + M_2^2(z_2(t)) = 1.$$

Выражая функции принадлежности нечетких множеств M_i^j через $z_1(t)$ и $z_2(t)$, получим:

$$M_1^1(z_1(t)) = \frac{z_1(t)+1}{2}, \quad M_1^2(z_1(t)) = \frac{1-z_1(t)}{2},$$

$$M_2^1(z_2(t)) = \frac{z_2(t)}{3}, \quad M_2^2(z_2(t)) = \frac{3-z_2(t)}{3}.$$

Правило модели 1

ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_1^1 и $z_2(t)$ есть M_2^2, ТО $\dot{x}(t) = A_1x(t)$.

Правило модели 2

ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_1^1 и $z_2(t)$ есть M_2^1, ТО $\dot{x}(t) = A_2x(t)$.

Правило модели 3

ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_1^2 и $z_2(t)$ есть M_2^2, ТО $\dot{x}(t) = A_3x(t)$.

Правило модели 4

$$\text{ЕСЛИ } z_1(t) \text{ есть } M_1^2 \text{ и } z_2(t) \text{ есть } M_2^1, \text{ ТО } \dot{x}(t) = A_4 x(t).$$

Здесь $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При дефаззификации получаем $\dot{x}(t) = \sum\limits_{i=1}^{4} h_i(z(t)) A_i x(t)$, где

$$h_1(z(t)) = M_1^1(z_1(t)) \times M_2^2(z_2(t)), \quad h_2(z(t)) = M_1^1(z_1(t)) \times M_2^1(z_2(t)),$$

$$h_3(z(t)) = M_1^2(z_1(t)) \times M_2^2(z_2(t)), \quad h_4(z(t)) = M_1^2(z_1(t)) \times M_2^1(z_2(t)).$$

Эта нечеткая модель точно представляет нелинейную систему в области $[-1,\, 1] \times [-1,\, 1]$.

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3^2(t) + \left(x_1^4(t) + 1\right) u(t), \quad \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1^4(t)\, x_4^(t) + x_3(t), \quad \dot{x}_4(t) = x_3^2(t) + x_2(t), \tag{1}$$

$$y_1(t) = \left(x_1^4(t) + 1\right) x_2(t) + x_4(t), \quad y_2(t) = x_2(t) + 2x_3(t).$$

Предположим, что $x_1(t)$ и $x_3(t)$ в системе (1) наблюдаемы и при этом $x_2(t)$ и $x_4(t)$ оцениваются нечетким наблюдателем. Также предположим, что

$$x_1(t) \in [-a,\, a], \quad x_3(t) \in [-b,\, b], \tag{2}$$

где a и b принимают положительные значения. Нелинейные члены $x_1^2(t)$ b $x_3^4(t)$ можно представить в виде

$$x_1^2(t) = M_1^1(x_1(t)) \cdot a^2 + M_1^2(x_1(t)) \cdot 0,$$
$$x_3^4(t) = M_2^1(x_3(t)) \cdot b^4 + M_2^2(x_3(t)) \cdot 0,$$

где

$$M_1^1(x_1(t)),\ M_1^2(x_1(t)),\ M_2^1(x_3(t)),\ M_2^2(x_3(t)) \in [0,\, 1],$$
$$M_1^1(x_1(t)) + M_1^2(x_1(t)) = 1, \quad M_2^1(x_3(t)) + M_2^2(x_3(t)) = 1.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$M_1^1(x_2(t)) = \frac{x_1^2(t)}{a^2}, \quad M_1^2(x_1(t)) = 1 - M_1^1(x_1(t)) = 1 - \frac{x_1^2(t)}{a^2},$$

$$M_2^1(x_3(t)) = \frac{x_3^4(t)}{b^4}, \quad M_2^2(x_3(t)) = 1 - M_2^1(x_3(t)) = 1 - \frac{x_3^4(t)}{b^4}.$$

Тогда нелинейная система представляется нечеткой моделью Takagi–Sugeno, задаваемой с помощью правил вида:

Правило 1

ЕСЛИ $x_1(t)$ есть M_1^1 и $x_3(t)$ есть M_2^1,

$$\text{ТО} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t), \\ y(t) = C_1 x(t). \end{cases}$$

Правило 2
ЕСЛИ $x_1(t)$ есть M_1^1 и $x_3(t)$ есть M_2^2,

$$\text{ТО} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)\,, \\ y(t) = C_2 x(t)\,. \end{array} \right.$$

Правило 3
ЕСЛИ $x_1(t)$ есть M_1^2 и $x_3(t)$ есть M_2^1,

$$\text{ТО} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)\,, \\ y(t) = C_3 x(t)\,. \end{array} \right.$$

Правило 4
ЕСЛИ $x_1(t)$ есть M_1^2 и $x_3(t)$ есть M_2^2,

$$\text{ТО} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)\,, \\ y(t) = C_4 x(t)\,. \end{array} \right.$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \quad x_2(t), \quad x_3(t), \quad x_4(t))^T$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} a^4+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & a^4+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^4 \\ 0 & 1 & b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} a^4+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & a^4+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нечеткая модель, задаваемая указанными правилами, является точным представлением нелинейной системы (1) при условиях (2) в случае, когда исходные переменные не зависят от оценки переменных $x_2(t)$ и $x_4(t)$. При численном моделировании можно задавать различные значения a и b в рамках использования изучаемой технической системы.

Построенный нечеткий регулятор делает асимптотически устойчивой систему управления в целом, при этом оценка нечеткого наблюдателя состояния нелинейной системы является оценкой, которая характеризуется отсутствием стационарных ошибок.

Построение нечеткого регулятора нелинейной системы в общем случае

Пусть $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_p(t))$, $w_i(z(t))$ – произведение всех различных M_{ij}, соответствующих iму правилу, то есть

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} w_i(z(t))}.$$

Тогда для всех t выполнено: $\sum\limits_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$, $h_i(z(t)) \geq 0$. Полагаем:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t)\right),$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t). \tag{3}$$

При построении нечеткого наблюдателя требуется (см. [4, 5]), чтобы выполнялось соотношение

$$x(t) = \hat{x}(t) \to 0$$

При $t \to \infty$, где $\hat{x}(t)$ положение вектора, определенное нечетким наблюдателем. Это условие гарантирует стремление к нулю стационарной ошибки. Структура нечеткого наблюдателя для непрерывной нечеткой системы задается с помощью правил следующего вида:

ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_{i1} и ... и $z_p(t)$ есть M_{ip}

$$\text{ТО} \begin{cases} \hat{x}(t) = A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i\hat{x}(t),\ i = 1, 2, ..., r. \end{cases}$$

Если вектор $z(t)$ не зависит от состояния переменных, определенных нечетким наблюдателем, то при наличии нечеткого наблюдателя регулятор примет вид

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) F_i\hat{x}(t). \tag{4}$$

Соответствующие правила управления имеют следующий вид:

ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_{i1} и ... и $z_p(t)$ есть M_{ip}, ТО

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) F_i\hat{x}(t).$$

Нечеткий наблюдатель для непрерывной нечеткой системы задается равенствами

$$\hat{x}(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) (A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t))), \tag{5}$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i\hat{x}(t).$$

С учетом (3)–(5) расширенная непрерывная система принимает вид

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))\, h_j(z(t))\, G_{ij}\beta(t),$$

где $\beta(t) = (x(t),\, \alpha(t))$, $G_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_iF_j & B_iF_j \\ 0 & A_i - K_iC_j \end{pmatrix}$, и $\alpha(t)$ определяется уравнением

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))\, h_j(z(t))\, (A_iK_i - C_j)\,\alpha(t).$$

Здесь значения F_i, K_i находятся с помощью техники выпуклой оптимизации на основе линейных матричных неравенств (см., например, [5]).

Асимптотическая устойчивость состояния равновесия нечетких управляемых систем

Система $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ называется квадратично устойчивой, если существует квадратичная функция, $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, $V(0) = 0$, удовлетворяющая условиям

$$V(x(t)) > 0 \ \ \forall x(t) \neq 0 \Leftrightarrow P > 0 \text{ и } \dot{V}(x(t)) < 0 \ \ \forall x(t) \neq 0.$$

Если такая функция V существует, то она называется функцией Ляпунова. Рассмотрим систему $\dot{x}(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(z(t))A_ix(t)$. Условие $\dot{V}(x(t)) < 0$ переписывается в виде

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))A_ix(t)\right)^T Px(t) + x^T(t)P\left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))A_ix(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\left(x^T(t)\left(A_i^TP\right)x(t) + x(t)(PA_i)x(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))x^T(t)\left(A_i^TP + PA_i\right)x(t) < 0.$$

Таким образом, достаточным условием асимптотической устойчивости рассматриваемой системы является наличие положительно определенной матрицы , такой, что $A_i^TP + PA_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$

Для получения условий устойчивости для замкнутых систем, подставим выражение

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))F_i\hat{x}(t)$$

в равенство $\dot{x}(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(z(t))\,(A_ix(t) + B_iu(t))$. Тогда получим:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))\left(A_i - B_iF_j\right) \tag{6}$$

Это означает, что система $\dot{x}(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(z(t))\,(A_ix(t)\,+\,B_iu(t))$ асимптотически устойчива, если существует положительно определенная матрица V такая, что $\left(A_i-B_iF_j\right)^TP+P\left(A_i-B_iF_j\right)<0$ для всех $i,\ j=1,2,\ldots,r$.

Это условие можно записать в более удобной форме. Собирая в правой части выражения (6) вместе члены с одинаковыми индексами и обозначая $G_{ii}=A_i-B_iF_i$, $G_{ij}=A_i-B_iF_j$, получим:

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))h_i(z(t))\,G_{ii}x(t)+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}h_i(z(t))\,h_j(z(t))\left(\frac{1}{2}(G_{ij}\,+\,G_{ji})\right)x(t).$$

Таким образом, положение равновесия системы (6) глобально асимптотически устойчиво, если существует общая положительно определенная матрица такая, что одновременно выполняются условия

$$G_{ii}^TP\,+\,PG_{ii}<0\ \text{ и }\ \left(\tfrac{1}{2}(G_{ij}\,+\,G_{ji})\right)^TP\,+\,P\left(\tfrac{1}{2}(G_{ij}\,+\,G_{ji})\right)\,<\,0$$

для всех $i<j$. В частности, если $B_1=B_2=\ldots=B_r$, то второе условие становится следствием первого: если найдется матрица B - общая для всех слагаемых в системе (6), то для устойчивости достаточно существования такой положительно определенной матрицы , что $G_{ii}^TP\,+\,PG_{ii}<0$.

В случае, когда исходные переменные $z(t)$ оцениваются нечетким наблюдателем, $z(t)\neq\hat{z}(t)$, и мы должны писать $w_i(\hat{z}(t))$ вместо $w_i(z(t))$. Тогда нечеткий наблюдатель вместо

$$\hat{x}(t)=-\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\,(A_i\hat{x}(t)+B_iu(t)+K_i(y(t)-\hat{y}(t))),\quad \hat{y}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\,C_i\hat{x}(t)$$

будет иметь вид:

$$\hat{x}(t)=-\sum_{i=1}^{r}h_i(\hat{z}(t))\,(A_i\hat{x}(t)+B_iu(t)+K_i(y(t)-\hat{y}(t))),\quad \hat{y}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(\hat{z}(t))\,C_i\hat{x}(t).$$

Соответственно нечеткий регулятор запишется в виде

$$u(t)=-\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\,F_i\hat{x}(t)$$

Для получения условий устойчивости снова подставим $u(t)$ в выражение для $\dot{x}(t)$ и соберем в правой части слагаемые с индексами ijj вместе. Получим:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))\,h_k(\hat{z}(t))\,G_{ijk}x(t)+\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(z(t))\,h_j(\hat{z}(t))\,h_j(\hat{z}(t))\,G_{ijj}x(t)+\\&+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j<k}^{r}h_i(z(t))\,h_j(\hat{z}(t))\,h_k(\hat{z}(t))\left(\tfrac{1}{2}\left(G_{ijk}+G_{ikj}\right)\right)x(t).\end{aligned}$$

Следовательно, положение равновесия системы

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_k(\hat{z}(t))G_{ijk}x(t)$$

глобально асимптотически устойчиво, если существует такая общая положительно определенная матрица , что одновременно выполняются условия $G_{ijj}^{T}P+PG_{ijj}<0$ и $\left(\frac{1}{2}(G_{ijk}+G_{ikj})\right)^{T}P+P\left(\frac{1}{2}(G_{ijk}+G_{ikj})\right)<0$ для всех $i,\ j<k$.

Замечание. Недостатком рассмотренных условий устойчивости является то, что они не используют входящие в исходную систему функции $h_i(t)$. Для того чтобы использовать эти функции, рассмотрим вместо квадратичной функции Ляпунова нечеткую функцию Ляпунова. Эта функция имеет вид $V(x(t))=\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(z(t))x^T(t)P_ix(t)$ [6].

Применим нечеткую функцию Ляпунова для нахождения условий устойчивости системы (3) при наличии регулятора (4). В прежних обозначениях $(G_{jk}=A_j-B_jF_k)$ получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть все* $h_i(t)$ *ограничены:* $\left|\dot{h}_i(t)\right|\le\delta_i$ *для всех* i*, а* δ_i *– заданные положительные числа; и пусть все матрицы* P_i*, входящие в локальные квадратичные функции Ляпунова* $x^T(t)P_ix(t)$ *, пропорциональны:* $P_j=\gamma_{ij}P_i$ *для всех* $i,\ j=1,\ \ldots,\ r$ *и* $\gamma_{ij}>0$ *для* $i\neq j$*,* $\gamma_{ij}=1$*, для* $i=j$*. Тогда система (3) стабилизируется посредством нечеткого регулятора (4), если найдутся такие положительно определенные матрицы* P_i *и матрицы* F_i*, что* $\sum\limits_{k=1}^{r}\delta_kP_k+\left(G_{jj}^{T}P_i+P_iG_{jj}\right)<0,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ r$ *и* $\left(\frac{1}{2}\left(G_{jk}+G_{kj}\right)\right)^{T}P_i+P_i\left(\frac{1}{2}\left(G_{jk}+G_{kj}\right)\right)<0$ *для всех* $i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ r$ *таких, что* $j<k$*.*

При доказательстве теоремы ограниченность $\dot{h}_i(t)$ используется для оценки производной $\dot{V}(x(t))$, а пропорциональность матриц P_i позволяет собрать подобные члены в выражении для правой части $\dot{V}(x(t))$.

Литература

1. Driankov D., Hellendorm H., Reich Frank M. An introduction to fuzzy control. – Berlin: Springer, 1996.

2. Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией: алго-ритмическое конструирование. – М.: УРСС, 2007.

3. TAKAGI T., SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. – 1985. – Vol.15. – № 116. – P. 116–132.

4. Емельянов С.В., Коровин С.К. Наблюдатели состояния для неопределенных систем // Математическое моделирование. Проблемы и результаты. – М.: Наука, 2003. – С. 12–35.

5. TANAKA K., WANG H.O. Fuzzy regulators and fuzzy observer: a linear matrix inequality approach // Proc. Of 36th IEEE Conference of Decision and Control. Vol.2. – San Diego, 1997. – P. 1315–1320.

6. TANAKA K., HORI T., WANG H. O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2003. – № 11(5) – P. 582–589.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.02.11