УДК 517.958

# МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ – АДВЕКЦИИ РАДОНА В СИСТЕМЕ ГРУНТ – АТМОСФЕРА*

**Р.И. Паровик[1, 2]**

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Филиал Дальневосточного государственного технического университета (ДВПИ имени В.В. Куйбышева), 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: romano84@mail.ru

Рассмотрена одномерная математическая модель нестационарной диффузии – адвекции радона в системе грунт – атмосфера. Получено аналитическое решение такой модели, согласно которому были построены кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере.

*Ключевые слова: радон, диффузия, адвекция, модель, грунт, атмосфера*



MSC 65N80

# MODEL FOR UNSTEADY OF DIFFUSION –ADVECTION OF RADON IN SOIL – ATMOSPHERE

**R.I. Parovik[1, 2]**

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Branch of Far-Eastern National Technical University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Tushkanova st., 11/1, Russia

E-mail: romano84@mail.ru

We consider a mathematical model for unsteady transport of radon from the constant coefficients in the soil – atmosphere. An explicit analytical solution for this model and built at different times of his profiles.

*Key words: radon, model, diffusion, advection, soil, atmosphere*



*Работа выполнена при поддержке гранта АВЦП «РНПВШ» № 2.1.1/544.

## Введение

Изучение процессов переноса радона в системе грунт – атмосфера представляет определенный научный интерес. Это вызвано тем, что радон является индикатором напряженно-деформированного состояния геосреды и оказывает воздействие на некоторые геофизические поля [1]. Например, радон участвует в формировании электрического поля приземного слоя атмосферы и является одним из предвестников землетрясений, что в некотором смысле определяет актуальность исследования радона в различных системах и средах [1]–[3].

Исследование распространения радона в различных средах осуществляется с помощью математических моделей, которые учитывают различные механизмы переноса, в основном адвекцию и диффузию. Однако теоретические оценки этих параметров, которые были получены с помощью классических моделей, не позволяют объяснить аномально высокие значения объемной активности радона вблизи поверхности земли [4]. Следовательно, возникает необходимость в разработке математической модели, в которой присутствовали бы механизмы, ускоряющие диффузию и адвекцию. Например, это может быть модель аномальной диффузии и адвекции радона во фрактальной пористой среде [5] или модель обычной диффузии и адвекции, учитывающая акустические возмущения в грунте.

Однако на первом этапе моделирования сначала необходимо получить некоторое представление о переносе радона в системе грунт – атмосфера во времени и пространстве. Для этой цели необходимо разработать модель нестационарного переноса радона в системе грунт – атмосфера и получить ее аналитическое решение.

## Постановка задачи

Согласно теории эманационного метода в радиометрической разведке перенос радона из пористого однородного грунта к земной поверхности осуществляется с помощью механизмов диффузии и конвекции [4].

В данной работе мы будем рассматривать адвекцию как перенос, который может включать в себя либо конвекцию, либо фильтрацию. Будем считать характеристики переноса постоянными заданными величинами. Тогда задача нестационарного переноса радона в системе грунт – атмосфера ($z$, $t>0$) может быть представлена в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial A}{\partial t}=D_g\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2}+v_g\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}-\lambda\left(A(z,t)-A_\infty\right),z>0,\\
\frac{\partial A}{\partial t}=D_a\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2}+v_a\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}-\lambda A(z,t),z<0,\\
D_g\left.\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0+0}+v_g\left.A(z,t)\right|_{z=0+0}=D_a\left.\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0-0}+v_a\left.A(z,t)\right|_{z=0-0},\\
\left.A(z,t)\right|_{z=0+0}=\left.A(z,t)\right|_{z=0-0},\lim_{z\to\infty}A(z,t)=A_\infty,\lim_{z\to-\infty}A(z,t)=0,
\end{gathered}\tag{1}$$

где $D_g$, $D_a$ – коэффициенты диффузии радона в грунте и в приземной атмосфере, м$^2$/с; $v_g$,$v_a$ – скорость адвекции радона сответственно в грунте и в приземной атмосфере, м/с; $\lambda$ – постоянная распада радона, 1/с; $A_\infty$ – объемная активность радона, который находится в радиоактивном равновесии с радием ($^{226}Ra$) на заданной глубине в грунте ($A_\infty=K_{em}A_{Ra}\rho_s(1-\eta)$), где $K_{em}$ – коэффициент эманирования радона, отн. ед.; $A_{Ra}$ – удельная активность $^{226}Ra$, Бк/кг; $\rho_s$ – плотность твердых частиц грунта, кг/м$^3$; $\eta$ – пористость грунта, отн. ед; $A(z,t)$ – объемная активность радона в грунте, Бк/м$^3$.

## Методика решения

Упростим задачу (1), сделав следующее преобразование – замену вида:

$$A(z,t) = e^{-\lambda t} u(x_g,t),\ x_g = z + v_g t,\ A(z,t) = e^{-\lambda t} u(x_a,t),\ x_a = z + v_a t. \tag{2}$$

Подставляя выражения (2) в модельное уравнение и граничные условия (1), получим следующую задачу:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u(x_g,t)}{\partial t} = D_g \frac{\partial^2 u(x_g,t)}{\partial x_g^2} + \lambda A_\infty e^{\lambda t}, x_g > v_g t,\\
\frac{\partial u(x_a,t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 u(x_a,t)}{\partial x_a^2}, x_a < v_a t,\\
D_g \left.\frac{\partial u(x_g,t)}{\partial x_g}\right|_{x_g = v_g t+0} + v_g\, u(x_g,t)\big|_{x_g = v_g t+0} = D_a \left.\frac{\partial u(x_a,t)}{\partial x_a}\right|_{x_a = v_a t-0} + v_a\, u(x_a,t)\big|_{x_a = v_a t-0},\\
u(x_g,t)\big|_{x_g = v_g t+0} = u(x_a,t)\big|_{x_a = v_a t-0}, \lim_{x_g\to\infty} u(x_g,t) = A_\infty e^{\lambda t}, \lim_{x_a\to-\infty} u(x_a,t) = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Сделаем преобразование Лапласа по переменной времени $t$ для задачи (3). Приходим к следующей задаче для изображения:

$$\begin{gathered}
D_g \frac{d^2 F(x_g,p)}{dx_g^2} - pF(x_g,p) + \frac{\lambda A_\infty}{p-\lambda} = 0, D_a \frac{d^2 F(x_a,p)}{dx_a^2} - pF(x_a,p) = 0,\\
D_g \left.\frac{dF(x_g,t)}{dx_g}\right|_{x_g = v_g t+0} + v_g\, F(x_g,p)\big|_{x_g = v_g t+0} =\\
= D_a \left.\frac{dF(x_a,p)}{dx_a}\right|_{x_a = v_a t-0} + v_a\, F(x_a,p)\big|_{x_a = v_a t-0},\\
F(x_g,p)\big|_{x_g = v_g t+0} = F(x_a,p)\big|_{x_a = v_a t-0}, \lim_{x_g\to\infty} F(x_g,p) = \frac{A_\infty}{p-\lambda}, \lim_{x_a\to-\infty} F(x_a,p) = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Решение дифференциальных уравнений в уравнении (4) известны, а с учетом краевых условий на внешних границах их можно записать следующим образом:

$$F(x_g,p) = C_1 e^{-x_g\sqrt{\frac{p}{D_g}}} + \frac{A_\infty}{p-\lambda}, F(x_a,p) = C_2 e^{x_a\sqrt{\frac{p}{D_a}}}. \tag{5}$$

Найдем константы интегрирования $C_1$ и $C_2$. Используем для этой цели краевые условия на внутренней границе раздела сред грунт – атмосфера задачи (4). Получим следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases}
C_1 e^{-v_g t\sqrt{\frac{p}{D_g}}} = C_2 e^{v_a t\sqrt{\frac{p}{D_a}}} - \dfrac{A_\infty}{p-\lambda},\\
C_1 e^{-v_g t\sqrt{\frac{p}{D_g}}} \left(v_g - \sqrt{D_g p}\right) = C_2 e^{v_a t\sqrt{\frac{p}{D_a}}} \left(v_a + \sqrt{D_a p}\right) - \dfrac{v_g A_\infty}{p-\lambda}.
\end{cases} \tag{6}$$

Решение для системы (6) имеет вид:

$$C_1=-\frac{A_\infty\left(a+b\sqrt{p}\right)e^{\dfrac{v_g t}{\sqrt{D_g}}\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(a+c\sqrt{p}\right)},\ C_2=\frac{A_\infty e^{-\dfrac{v_a t}{\sqrt{D_a}}\sqrt{p}}}{p-\lambda}\left(1-\frac{a+b\sqrt{p}}{a+c\sqrt{p}}\right), \tag{7}$$

$$a=v_g-v_a,\ b=-\sqrt{D_a},\ c=-\sqrt{D_a}-\sqrt{D_g}.$$

Подставляя найденные константы (7) в решения для изображения (5), получим:

$$F\left(x_g,p\right)=\frac{A_\infty}{p-\lambda}\left(1-\frac{\left(a+b\sqrt{p}\right)e^{-\tau_g\sqrt{p}}}{\left(a+c\sqrt{p}\right)}\right),\ F\left(x_a,p\right)=\frac{A_\infty e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{p-\lambda}\left(1-\frac{a+b\sqrt{p}}{a+c\sqrt{p}}\right),\ (8)$$

$$\frac{\left(x_g-v_g t\right)}{\sqrt{D_g}}=\tau_g,\ -\frac{\left(x_a-v_a t\right)}{\sqrt{D_a}}=\tau_a.$$

Осталось перейти к оригиналу. Для этой цели воспользуемся таблицей перехода из справочника [6] и находим:

$$\frac{A_\infty}{p-\lambda}\Rightarrow A_\infty e^{\lambda t},$$

$$\frac{A_\infty e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{p-\lambda}\Rightarrow\frac{A_\infty e^{\lambda t}}{2}\left(e^{-\tau_a\sqrt{\lambda}}\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau_a}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\lambda t}\right)+e^{\tau_a\sqrt{\lambda}}\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau_a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\lambda t}\right)\right),$$

где $\operatorname{erfc}(z)=1-\operatorname{erf}(z)$, $\operatorname{erf}(z)=2\pi^{-1/2}\int\limits_0^z e^{-x^2}dx$ – интеграл вероятностей.

Введем следующие обозначения:

$$E_+=\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_g t}}+\sqrt{\lambda t}\right),\ E_-=\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_g t}}+\sqrt{\lambda t}\right),\ E_0=\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_g t}}+\gamma\sqrt{t}\right).$$

Найдем оригинал для выражения

$$\frac{\left(a+b\sqrt{p}\right)e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(a+c\sqrt{p}\right)}=\frac{\gamma e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(\gamma+\sqrt{p}\right)}+\frac{\xi\sqrt{p}e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(\gamma+\sqrt{p}\right)},\quad \gamma=a/c;\xi=b/c.$$

Для первого слагаемого оригинал примет следующий вид:

$$\frac{\gamma e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(\gamma+\sqrt{p}\right)}\Rightarrow\frac{\gamma e^{\lambda t}}{2}\left(\frac{e^{-\tau_a\sqrt{\lambda}}E_-}{\gamma+\sqrt{\lambda}}+\frac{e^{\tau_a\sqrt{\lambda}}E_+}{\gamma-\sqrt{\lambda}}\right)-\frac{\gamma^2 e^{\gamma\tau_a+\gamma^2 t}E_0}{\gamma^2-\lambda},$$

для второго слагаемого – соответствующий вид:

$$\frac{\xi\sqrt{p}e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(\gamma+\sqrt{p}\right)}\Rightarrow\frac{\xi\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{2}\left(\frac{e^{-\tau_a\sqrt{\lambda}}E_-}{\gamma+\sqrt{\lambda}}-\frac{e^{\tau_a\sqrt{\lambda}}E_+}{\gamma-\sqrt{\lambda}}\right)+\frac{\xi\gamma^2 e^{\gamma\tau_a+\gamma^2 t}E_0}{\gamma^2-\lambda}.$$

В результате получим:

$$\frac{\left(\gamma+\xi\sqrt{p}\right)e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{(p-\lambda)\left(\gamma+\sqrt{p}\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{e^{\lambda t}}{2}\left(\frac{\left(\gamma+\xi\sqrt{\lambda}\right)e^{-\tau_a\sqrt{\lambda}}E_-}{\gamma+\sqrt{\lambda}}+\frac{\left(\gamma-\xi\sqrt{\lambda}\right)e^{\tau_a\sqrt{\lambda}}E_+}{\gamma-\sqrt{\lambda}}\right)+\frac{(\xi-1)\,\gamma^2e^{\gamma\tau_a+\gamma^2t}E_0}{\gamma^2-\lambda}.$$

Найдем оригинал для первого изображения из уравнения (8):

$$\frac{A_\infty}{p-\lambda}\left(1-\frac{\left(\gamma+\xi\sqrt{p}\right)e^{-\tau_g\sqrt{p}}}{\gamma+\sqrt{p}}\right)\Rightarrow A_\infty e^{\lambda t}-\frac{A_\infty e^{\lambda t}\left(\gamma+\xi\sqrt{\lambda}\right)e^{-\tau_g\sqrt{\lambda}+\lambda t}E_-}{2\left(\gamma+\sqrt{\lambda}\right)}+$$

$$+\frac{A_\infty e^{\lambda t}\left(\gamma-\xi\sqrt{\lambda}\right)e^{\tau_g\sqrt{\lambda}+\lambda t}E_+}{2\left(\gamma-\sqrt{\lambda}\right)}+\frac{A_\infty e^{\lambda t}\,(\xi-1)\,\gamma^2e^{\gamma\tau_g+\gamma^2t}E_0}{\gamma^2-\lambda}.$$

Для второго изображения из уравнения (8) получим:

$$\frac{A_\infty e^{-\tau_a\sqrt{p}}}{p-\lambda}\left(1-\frac{\gamma+\xi\sqrt{p}}{\gamma+\sqrt{p}}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{A_\infty e^{\lambda t}(1-\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\tau_a\sqrt{\lambda}}E_-}{2\left(\gamma+\sqrt{\lambda}\right)}-\frac{A_\infty e^{\lambda t}(1-\xi)\sqrt{\lambda}e^{\tau_g\sqrt{\lambda}}E_+}{2\left(\gamma-\sqrt{\lambda}\right)}+\frac{A_\infty\,(1-\xi)\,\gamma^2e^{\gamma\tau_a+\gamma^2t}E_0}{\gamma^2-\lambda}.$$

Решения с учетом преобразования (2) окончательно запишутся таким образом:

$$A(z,t)=A_\infty\,(1-R_1)\,,z>0,A(z,t)=A_\infty R_2,z<0, \tag{9}$$

$$R_1=\frac{\left(\gamma+\xi\sqrt{\lambda}\right)e^{-z\sqrt{\frac{\lambda}{D_g}}}E_-}{2\left(\gamma+\sqrt{\lambda}\right)}+\frac{\left(\gamma-\xi\sqrt{\lambda}\right)e^{z\sqrt{\frac{\lambda}{D_g}}}E_+}{2\left(\gamma-\sqrt{\lambda}\right)}-\frac{(1-\xi)\,\gamma^2e^{\frac{\gamma z}{\sqrt{D_g}}+\gamma^2t-\lambda t}E_0}{\gamma^2-\lambda},$$

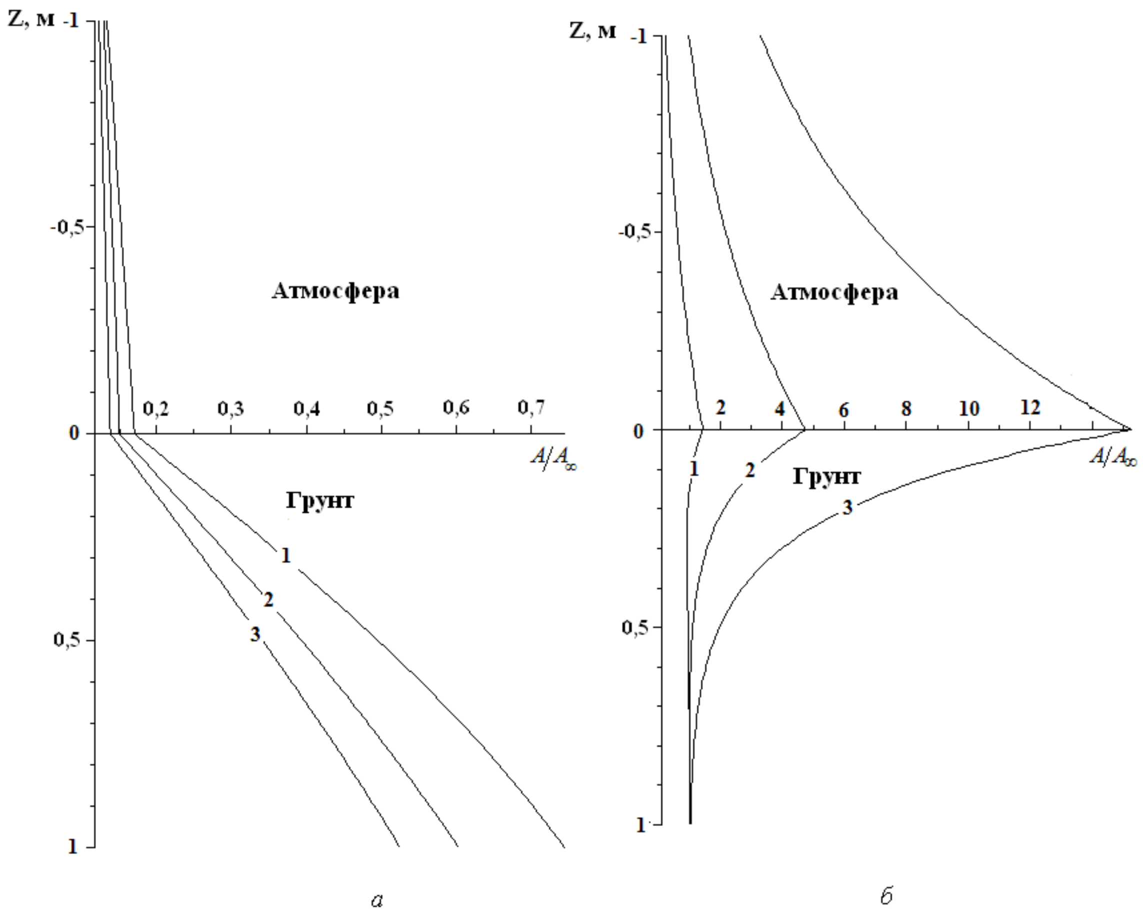
$$R_2=\frac{(1-\xi)\sqrt{\lambda}e^{z\sqrt{\frac{\lambda}{D_a}}}E_-}{2\left(\gamma+\sqrt{\lambda}\right)}-\frac{(1-\xi)\sqrt{\lambda}e^{-z\sqrt{\frac{\lambda}{D_a}}}E_+}{2\left(\gamma-\sqrt{\lambda}\right)}+\frac{(1-\xi)\,\gamma^2e^{-\frac{\gamma z}{\sqrt{D_a}}+\gamma^2t-\lambda t}E_0}{\gamma^2-\lambda}.$$

Решение (9) имеет экспоненциальный характер, т. е. концентрация радона в грунте и в атмосфере падает по экспоненциальному закону. Оно несколько похоже на решение для стационарной атмосферы, ранее полученное автором в работе [7]. Проведем численное исследование решения (9).

## Численное моделирование

В численном моделировании, для того чтобы на границе раздела сред грунт – атмосфера не получилось больших градиентов, параметры задачи брались соизмеримыми: $D_a = 5 \cdot 10^{-3}$ м$^2$/с, $D_g = 5 \cdot 10^{-4}$ м$^2$/с, $v_a = 10^{-3}$ м/с, $v_g = 10^{-4}$ м/с.

Расчетные кривые распределения концентрации радона, построенные для грунта и атмосферы, приведены на рисунке. Согласно графику, приведенному на рисунке (*а*), концентрация радона падает со временем к земной поверхности. Значения относительной объемной активности на границе раздела сред колеблются в диапазоне 0,05 ÷ 0,15, что составляет около 0,1 от фонового значения объемной активности радона в грунте. В атмосфере за счет диффузии и конвекции концентрация радона стремится к нулю. Расчетные кривые распределения концентрации радона в системе грунт – атмосфера (*б*) построены согласно предположения о том, что конвекция радона в атмосфере отсутствует, т. е. $v_a = 0$ м/с, а скорость адвекции радона для грунта принимает значение $v_g = 5 \cdot 10^{-2}$ м/с.




Кривые распределения концентрации радона в системе грунт – атмосфера
в различные моменты времени $t$ (1 – 1000 с; 2 – 2000 с; 3 – 3000 с):
*а* – при $v_a = 10^{-3}$ м/с, $v_g = 10^{-4}$ м/с; *б* – при $v_a = 0$ м/с, $v_g = 10^{-2}$ м/с

Заметим, что кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере похожи по форме на кривые распределения, полученные в работе [5], в которой рассматривалась задача о массопереносе радона из фрактального пористого грунта в приземный слой атмосферы. Механизмами переноса радона являлись супердиффузия и аномальная адвекция. Форма расчетных кривых похожа на форму расчетных кривых, характеризующих аномальную адвекцию. Поэтому можно сделать вывод о том, что увеличение значений скорости адвекции радона в однородном пористом грунте может соответствовать возникновению аномальной адвекции во фрактальном пористом грунте.

## Заключение

Увеличение скорости адвекции в однородном пористом грунте приводит к накоплению радона вблизи земной поверхности. Этот эффект может быть вызван разрушением пористой структуры грунта в результате деформационных возмущений.

Увеличение скорости переноса радона к земной поверхности может быть вызвано также акустическими возмущениями в грунте в результате, например, образования трещин. Известно, что акустическое и электрическое поля связаны между собой, а радон, в свою очередь, оказывает влияние на формирование электрического поля приземной атмосферы.

Поэтому учет влияния акустических сигналов на процесс переноса радона в грунте является следующим этапом в развитии математической модели (1) с последующим ее обобщением на случай фрактальной пористой среды согласно работе [5].

## Литература

1. Рудаков В.П. Мониторинг напряженно-деформированного состояния пород сейсмоактивного региона эманационным методом // Геохимия. 1986. № 9. С. 1337–1342.

2. Фирстов П.П., Рудаков В.П. Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Вулканология и сейсмология. 2002. № 6. С. 1–16.

3. Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог: ТрГУ, 1998. 122 с.

4. Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. Л.: Недра, 1965. 759 с.

5. Паровик Р.И., Шевцов Б.М. Моделирование процесса массопереноса радона ($^{222}$Rn) из фрактальной среды в атмосферу // Мат. моделирование. 2009. № 8. Т. 21. С. 30–36.

6. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 455 с.

7. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Обобщенная одномерная модель массопереноса радона (ОА $^{222}$Rn) и его эксхаляция в приземный слой атмосферы // Мат. моделирование. 2007. № 11. Т. 19. С. 43—50.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.09.10