Математика
Mathematica

УДК 512.24

О ГРУППАХ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ $<\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{a}^{\mathbf{n}}=\mathbf{1},\mathbf{ab}=\mathbf{b}^{\mathbf{3}}\mathbf{a}^{\mathbf{3}}>$

А.П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: as2022@mail.ru

Устанавливается, что для $n=4$ и $n\geq 7$ группы $G(n) = <a,b;a^n=1,b=b^3a^3>$ бесконечны. Для остальных n вычисляется порядок и исследуется строение группы $G(n)$.

Ключевые слова: группа, порядок, подгруппа, коммутант, фактор-группа

MSC 18A32

GROUPS WITH REPRESENTATION $<\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{a}^{\mathbf{n}}=\mathbf{1},\mathbf{ab}=\mathbf{b}^{\mathbf{3}}\mathbf{a}^{\mathbf{3}}>$

A.P. Goryshkin

Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy,
Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: as2022@mail.ru

Established that for $n=4$ and $n\geq 7$ group $G(n) = <a,b;a^n=1,ab=b^3a^3>$ are infinite, and for the remaining n evaluated the procedure and investigate the structure of the group $G(n)$.

Key words: group, the order of the subgroup, subgroup, quotient

Введение

Группы $G(n)$ с представлением

$$G(n) = < a,\ b;\ a^n = 1,\ ab = b^3a^3 >$$

широко используются в различных топологических приложениях. Для некоторых значений n устройство $G(n)$ может оказаться очень непростым. Сложным может быть даже вопрос о порядке таких групп. В данной статье предлагается решение вопроса о порядке таких групп, а в конечном случае исследуется строение группы.

Исследование группы $G(n)$

Заметим сначала, что для любого n фактор-группа $G(n)$ по ее коммутанту является прямым произведением циклической группы $< a;\ a^n = 1 >$ порядка n, а также циклической $< ab;\ (ab)^2 = 1 >$ порядка 2.

Таким образом, индекс коммутанта равен $2n$. Группа $G(2)$ имеет представление

$$G(n) = < a,\ b;\ a^2 = 1,\ ab = b^3a^3 > = < a,\ b;\ a^2 = 1, aba^{-1} = b^3 > .$$

Из соотношений $a^2 = 1$, $aba^{-1} = b^3$ следует, что $b^8 = 1$. Таким образом, группа $G(2)$ является полупрямым произведением групп $< a;\ a^2 = 1 >$ и $< b;\ b^8 = 1 >$. Порядок $G(2)$ равен 16.

Группа $G(3)$, имеющая представление

$$G(3) = < a,\ b;\ a^3 = 1,\ ab = b^3a^3 > =$$

$$= < a,\ b;\ a^3 = 1,\ ab = b^3 > = < a,\ b;\ a^3 = 1,\ a = b^2 > = < b;\ b^6 = 1 >,$$

является циклической порядка 6. Подгруппа группы

$$G(4) = < a,\ b;\ a^4 = 1,\ ab = b^3a^3 >,$$

порожденная элементами $x = a^2$, $y = b^3$, $z = bab$, имеет представление с двумя определяющими соотношениями:

$$H = < x,\ y,\ z; xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x^2zy^{-1}x^{-1}(yx)^3x^2zy^{-1}x^{-1}(yx)^3x^2zy^{-1}x^{-1}(yx)^3x,$$

$$xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x(yx)^2yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^2yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}\cdot$$

$$\cdot y^{-1}xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^2yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x^2y^{-1}\cdot$$

$$\cdot x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x^2y^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x^2y^{-1}x^{-1}(yx)^3x >,$$

поэтому H, а следовательно, и группа $G(4)$ бесконечна.

Отметим, что бесконечность группы $G(4)$ можно получить из других, более общих соображений, используя метод малых сокращений. Введем новый порождающий элемент $c = ab$. Тогда $a = cb^{-1}$, $a^{-1} = bc^{-1}$, а группу

$$G(4) = < a,\ b;\ a^4 = 1,\ ab = b^3a^{-1} >$$

можно представить в виде

$$G(4) = < a,\ b,\ c;\ a^4 = 1,\ a = cb^{-1},\ c = b^3bc^{-1} >,$$

или

$$G(4) \ = < b,\ c;\ (bc^{-1})^4 \ = \ 1,\ c^2 \ = \ b^4 > .$$

Это значит, что $G(4)$ является фактор-группой свободного произведения G двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой:

$$G = < b,\ c;\ c^2 \ = \ b^4 > .$$

Фактор-группа G_1 группы G по нормальному замыканию элемента c^2 является свободным произведением двух циклических групп:

$$G = < b,\ c;\ b^4 \ = \ 1,\ c^2 \ = \ 1 > .$$

Сама же группа $G(4)$ – это фактор-группа группы G по нормальному замыканию N элемента $r \ = \ (bc^{-1})^4$.

Для симметризированного множества R, состоящего из циклических перестановок слов r и r^{-1}, в группе G выполняется условие $C'\left(\frac{1}{6}\right)$; поэтому каждый неединичный элемент из нормального замыкания множества N в группе G содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R. В подгруппе H, порожденной элементом b^2c, ни один элемент не содержит фрагментов слов длины ≥ 3 из R. Это значит, что нормальный делитель N имеет единичное пересечение с подгруппой H и, следовательно, фактор-группа $G/N \ = \ G(4)$ бесконечна.

Перейдем к рассмотрению группы $G(5)$. В группе

$$G(5) \ = < a,\ b;\ a^5 \ = \ 1,\ ab \ = \ b^3a^3 >$$

введем еще один порождающий элемент $c \ = \ (ab)^2$. Тогда

$$G(5) = < a,\ b, c;\ a^5 \ = \ 1,\ ab \ = \ b^3a^3,\ c \ = \ (ab)^2 > .$$

Из этих соотношений следует, что $b^{10} \ = \ 1$, $c^{11} \ = \ 1$. Кроме того, $bcb^{-1} \ = \ c^5$. Последнее соотношение означает, что подгруппа C нормальна в $G(5)$. Согласно выражению $aba^{-1}b^{-1} \ = \ c^{-2}$ подгруппа C = гр(c) содержится в коммутанте K группы $G(5)$. Исходя из того, что фактор-группа

$$< a,\ b, c;\ a^5 \ = \ 1,\ ab \ = \ b^3a^3,\ c \ = \ (ab)^2,\ b^{10} \ = \ 1,\ c^{11} \ = \ 1,$$

$$aca^{-1} = \ c^9,\ bcb^{-1} = \ c^5,\ c \ = \ 1 >$$

группы

$$< a,\ b,\ c;\ a^5 \ = \ 1,\ ab = b^3a^3,\ c = (ab)^2,\ b^{10} = 1,\ c^{11} = 1,\ aca^{-1} = c^9,\ bcb^{-1} = c^5 >$$

абелева, следует обратное включение: $C \supseteq K$. Итак, коммутант K совпадает с подгруппой C порядка 11, а фактор-группа по коммутанту имеет порядок 10. Следовательно, порядок группы $G(5)$ равен 110.

Отметим, что группа $G(5)$ порождается элементами b, c и ее представление имеет вид

$$G(5) \ = < b,\ c;\ b^{10} = 1,\ c^{11} = 1,\ bcb^{-1} = c^5 > .$$

Отсюда следует, что группа $G(5)$ является полупрямым произведением циклических групп

$$C = < c;\ c^{11} \ = \ 1 \ > B \ = < \ b;\ b^{10} \ = \ 1 >,$$

причем первая нормальна в $G(5)$, а вторая нет. Индекс коммутанта K в группе

$$G(6) = < a,\ b;\ a^6 = 1,\ ab = b^3a^3,\ ab = ba >$$

равен 12. В порождающих $x = [a, b]$, $y = [a^2, b]$ коммутант K имеет представление:

$$\begin{gathered}
K = < x,\ y; y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^{-2}yx^{-1}yx^{-2}yx^{-1}yx^{-1},\\
xyx^{-1}yx^{-2}y^2x^{-1}yx^{-2}(yx^{-1})^3yx^{-2}yx^{-1}yx^{-1}y^{-1},\\
xy^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}(xy^{-1})^3x^2y^{-1}xy^{-1}y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y,\\
x^{-1}yx^{-2}(yx^{-1})^7y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1},\\
x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1},\\
xy^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x,\\
xy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}y,\\
yx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x > .
\end{gathered}$$

Элемент x имеет в коммутанте порядок 84, порядок элемента y равен 21, а порядок xy равен 28. Фактор-группа K по ее коммутанту состоит из 28 элементов, а порядок второго коммутанта равен 27. Следовательно, порядок группы $G(6)$ – $27 \cdot 28 \cdot 12 = 9072$. Группа

$$G(7) = < a,\ b;\ a^7 = 1,\ ab = b^3a^3 > = < a, c;\ a^7 = 1,\ ca^{-3}c^{-1}ac^{-1}ac^{-1}a = 1 >$$

является фактор-группой свободного произведения двух циклических групп:

$$G = < a;\ a^7 = 1 > * < c > .$$

Сама же группа $G(7)$ – это фактор-группа группы G по нормальному замыканию N_1 элемента $r_1 = ca^{-3}c^{-1}ac^{-1}ac^{-1}a$. Для симметризированного множества R_1, состоящего из циклических перестановок слов r_1 и r_1^{-1}, в группе G выполняется условие $C'\left(\frac{1}{6}\right)$. Поэтому каждый неединичный элемент из нормального замыкания множества N_1 в группе G содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R_1. Отсюда следует, что нормальный делитель N имеет единичное пересечение с подгруппой $C = \text{гр}(c)$ и, следовательно, фактор-группа $G_1/N_1 = G(7)$ бесконечна.

Заключение

Заметим, что в последнем рассуждении используется лишь то свойство, что порядок элемента a строго больше $2 \cdot 3$. Поэтому не только для $n = 7$, но и для любого $n \geq 7$ группа $G(n)$ бесконечна. Таким образом, вопрос № 8.10 из работы [1] получает полное и окончательное решение.

Литература

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд., доп. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 2006.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.09.10