

На правах рукописи

Паровик Роман Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА
РАДОНА В СИСТЕМЕ «ГРУНТ-АТМОСФЕРА»

05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук наук

Комсомольск-на-Амуре — 2009

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (ИКИР ДВО РАН).

Научный руководитель: доктор физико - математических наук,
профессор Шевцов Борис Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук,
профессор Викулин Александр Васильевич

доктор физико - математических наук,
профессор Мейланов Руслан Пирметович

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Научно – исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
Кабардино - Балкарского научного центра
РАН

Защита состоится 15 октября 2009 в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.092.03 при Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете (ГОУВПО «КНАГТУ») по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27, ГОУВПО «КНАГТУ»

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУВПО «КНАГТУ»

Автореферат разослан 2 сентября 2009.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук



Зарубин М.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Исторически сложилось так, что первые работы по исследованию концентрации радона в почвенном воздухе и грунтовых водах были инициированы с целью разведки радиоактивных руд. В дальнейшем эти исследования сформировались в эманационный метод, основу которого составляет процесс массопереноса под действием механизмов диффузии и адвекции в грунте радиоактивного газа радона (^{222}Rn), который является продуктом распада радия (^{226}Ra). В результате этих исследований была разработана математическая диффузионно-адвективная модель переноса радона в грунте, которая стала классической и нашла широкое применение в различных областях знаний.

В последние десятилетия наблюдается резкий всплеск работ по исследованию динамики радона в области геодинамики. Результаты таких исследований с большой достоверностью дают основание рассматривать радон как индикатор напряженно-деформированного состояния геосреды и возможность его использования для прогноза сильных землетрясений или горных ударов в шахтах.

Велика роль радона в формировании электрического поля приземного слоя атмосферы так как, являясь естественным ионизатором, он оказывает влияние на его проводимость. При увеличении стока радона в приземный слой атмосферы ее проводимость увеличивается, что приводит к уменьшению напряженности атмосферного электрического поля.

Использование моделей массопереноса в области радиоэкологии и радиационной безопасности позволяет изучать перенос радионуклидов, в том числе радиоактивного газа радона, в атмосферу из хранилищ радиоактивных отходов, и прогнозировать пути их дальнейшего распространения.

Многообразие задач, решение которых требует дальнейшего развития моделей переноса радона в различных средах и системах определяет актуальность настоящей работы. Например, классическая модель диффузии-адвекции радона не позволяет объяснить аномальные всплески в поведении почвенного радона в случае однородной геологической структуры и отсутствия глубинных источников или разломов. Объяснить данный эффект можно фрактальными свойствами среды. Известно, что фрактальные свойства среды порождают более интенсивные процессы переноса. Математический аппарат по изучению сред с фрактальными свойствами хорошо развит, его применение к задачам переноса радона еще не рассматривалось и поэтому представляет большой научный интерес.

Основные результаты, посвященные математическому моделированию переноса радона в однородных средах, представлены в работах отечественных и зарубежных ученых А.Г. Граммакова, Ю.П. Булашевича, Г.Ф. Новикова, В.И. Уткина, А.К. Юркова, И.А. Козловой, П.П. Фирстова, В.П. Рудакова, И.М. Хайковича, В.С. Яковлевой, И.В. Павлова, А.А. Цапалова, Л.А. Гулабянца, Т.М. Ивановой, Г. Стейница, Т. Сасаки, Г. Мартинелли, К. Кристианссона, Л. Мэлквиста, Л. Торо, и др.

Целью работы является разработка и исследование математических моделей переноса радона в системе «грунт-атмосфера» с учетом фрактальных свойств грунта, и определение параметров модели по экспериментальным данным Петропавловска-Камчатского геодинамического полигона.

Основные задачи, решаемые в работе:

1. Разработка и исследование модели переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт рассматривается как однородная среда, а коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере линейно зависит от ее высоты.
2. Разработка алгоритма, на основе классической модели переноса радона в системе «грунт-атмосфера», для расчета плотности потока радона с поверхности земли по экспериментальным данным временных рядов радоновых полей, полученных на Петропавловске-Камчатском геодинамическом полигоне.
3. Разработка и исследование моделей переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт обладает фрактальными свойствами, для режимов аномальной диффузии и аномальной адвекции.
4. Исследование особенностей и условий смены режимов аномальной диффузии и аномальной адвекции в зависимости от фрактальных свойств грунта.

Методы исследования базируются на теории эманационного метода, на математическом аппарате теории дробного интегро-дифференцирования, линейной теории дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов и специальных функций.

Достоверность полученных в диссертации результатов подтверждается результатами расчетов по предложенным моделям, которые хорошо согласуются между собой и общими представлениями теории массопереноса.

Предмет исследования. Модели и режимы переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт является однородной или фрактальной структурой.

Научная новизна работы:

1. Разработана оригинальная модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой коэффициент диффузии в атмосфере представлен линейной функцией от ее высоты. Получено аналитическое решение такой модели, которое выражается через функцию Бесселя второго рода от мнимого аргумента.
2. Разработан алгоритм, на основе классической модели переноса радона в системе «грунт-атмосфера», для расчета плотности потока радона с поверхности земли по экспериментальным данным временных рядов радоновых полей, реализованный в компьютерной программе «РЭКСЭМ».

3. Впервые разработана модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт обладает фрактальными свойствами в режиме аномальной диффузии (супердиффузии). Получено аналитическое решение в терминах функции Миттаг-Леффлера, представляющее функцию распределения радона по глубине и высоте. Показано, что в частном случае решение этой модели сводится к классической модели диффузии радона.
4. Впервые предложена модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера» в режиме аномальной адвекции, в которой грунт обладает фрактальными свойствами. Получено аналитическое решение для такой модели и исследованы его особенности.
5. Определены условия перехода от супердиффузии к аномальной адвекции в зависимости от фрактальных свойств грунта.
6. Показано, на основе сопоставления полученных неклассических решений с экспериментальными данными, что грунт может обладать фрактальными свойствами.

Научная и практическая значимость работы. Работа была выполнена в соответствии с планами научных исследований ИКИР ДВО РАН, Программы Президиума РАН № 16 и Аналитической Ведомственной Целевой Программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/544. Полученные в работе результаты имеют как фундаментальное, так и прикладное значение при решении широкого круга задач: в проблеме формирования атмосферного электрического поля, в ряде задач геодинамики, сейсмологии и прогноза землетрясений, радиоэкологии, геохимии и геологоразведки и в ряде других областях знаний.

В результате математического моделирования была разработана программа «РЭКСЭМ» для анализа экспериментальных данных, полученных сотрудниками лаборатории комплексных исследований предвестников землетрясений и извержения вулканов ИВиС ДВО РАН под руководством П.П. Фирстова на станциях мониторинга радона на Петропавловск - Камчатском геодинимическом полигоне в районе Южной Камчатки. Программа зарегистрирована в Отраслевом фонде алгоритмов и программ (ОФАП).

Положения, выносимые на защиту:

1. Модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера» в режиме обычной диффузии и ее аналитическое решение.
2. Модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера» в режиме аномальной диффузии и ее аналитическое решение
3. Модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера» в режиме аномальной адвекции и ее аналитическое решение
4. Алгоритм расчета плотности потока радона с поверхности земли, в котором входными данными являются экспериментально полученные временные ряды подпочвенных радоновых полей на разных глубинах.

Презентация работы. Основные результаты докладывались на международных, всероссийских и региональных конференциях; IV Международной конференции. Солнечно - земные связи и предвестники землетрясений. 14-17 августа, 2007г., п. Паратунка, Камчатский край; I Региональной научно-технической конференции. Проблемы комплексного геофизического мониторинга Дальнего Востока, 12-16 ноября 2007 г., г. Петропавловск-Камчатский; IX Уральской молодежной научной школе по геофизике. Современные проблемы геофизики, 24-28 марта 2008 г., г. Екатеринбург; Межрегиональной конференции. Современные информационные технологии для научных исследований, 22-26 апреля 2008 г., г. Магадан; III Сахалинской молодежной научной школе. Природные катастрофы: изучение, мониторинг, прогноз, 3-6 июня 2008г., г. Южно - Сахалинск; Международной конференции. Математическое моделирование опасных природных явлений и катастроф, 30 июня – 04 июля 2008 г., г. Томск; Международном Российско - Абхазском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VII Школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» 17-22 мая 2009 г., г. Нальчик.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 22 работы, 7 из них в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК, и получено свидетельство о регистрации (№50200701049) компьютерной программы «РЭКСЭМ» в ОФАП.

Личный вклад автора. Автором было выполнено математическое моделирование процессов переноса радона в системе «грунт-атмосфера». Все основные результаты получены лично автором. Постановка задач исследований и обсуждение их результатов осуществлялись совместно с научным руководителем д.ф.-м.н. Б.М. Шевцовым, соавторами ряда работ к.ф.-м.н. П.П. Фирстовым и к.ф.-м.н. И.А. Ильиным, которым автор выражает свою благодарность.

Особые слова признательности автор выражает коллективу лаборатории комплексных исследований предвестников землетрясений и извержения вулканов ИВиС ДВО РАН, собравший под руководством П.П. Фирстова экспериментальный материал, который был использован в диссертационной работе.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 139 наименований. Объем работы составляет 112 страниц машинописного текста. Работа содержит 12 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы ее цель и задачи, указаны методы исследования, научная новизна и практическая значимость работы, определен личный вклад автора, а также сформулированы основные научные результаты,

выносимые на защиту. Кратко изложены структура и содержание работы.

В первой главе дается обзор современного состояния исследований переноса радона в системе «грунт-атмосфера».

Во второй главе разработана модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера» в режиме обычной диффузии и адвекции, получено аналитическое решение такой модели, построены распределения концентрации радона по глубине и высоте.

В разделе 2.1 раскрывается физика процесса переноса радона в системе «грунт-атмосфера». Вводятся в рассмотрение базовое уравнение переноса радона в грунте и основные обозначения характеристик переноса, дается их физическое толкование.

Перенос радона в системе «грунт-атмосфера» в основном осуществляется с помощью основных процессов диффузии и адвекции. Процесс адвекции характеризуется вертикальным перемещением радона в грунте в результате теплообмена (конвекции), вариаций давления (фильтрации), влагооборота и других процессов. В диссертационной работе грунт рассматривается, как пористая среда с открытыми и связанными между собой порами, что обеспечивает диффузию, а атмосфера ограничена приземным слоем.

В математическом моделировании процесса переноса радона в системе «грунт-атмосфера» будем считать характеристики переноса постоянными и известными величинами. Практический интерес, в большинстве случаев, представляет рассмотрение только вертикального переноса радона из грунта к земной поверхности. С учетом данных допущений базовое уравнение переноса радона в грунте будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} - D_G \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} + v_G \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} + \lambda (C(z, t) - C_\infty) = 0, \quad (1)$$

где D_G – обобщенный коэффициент диффузии радона в грунте, m^2/c ; $C(z, t)$ – концентрация радона на единицу объема грунта, $кол-во\ част./m^3$; C_∞ – концентрация радона, при которой он находится в равновесии с радием на единицу объема грунта на заданной глубине, $кол-во\ част./m^3$; v_G – скорость адвекции радона в грунте, m/c ; λ – постоянная распада радона, $1/c$; z – пространственная координата, m ; t – координата по времени, c .

Уравнение (1) применяется в различных модификациях, согласно которым не учитывается один из его членов. Например, рассматривается только стационарный случай или отсутствует скорость адвекции. В настоящей работе получено аналитическое решение для исходного уравнения (1).

В разделе 2.2 приводится постановка задачи, рассмотрена методика получения аналитического решения, с помощью которого строятся и исследуются распределения радона в системе «грунт-атмосфера».

Уравнение переноса радона в системе «грунт-атмосфера» (1) можно

представить в виде:

$$D_A \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} - \lambda C(z, t) = 0, \quad z > 0$$

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} - D_G \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} + v_G \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} + \lambda (C(z, t) - C_\infty) = 0, \quad z < 0, \quad (2)$$

где D_A – коэффициент диффузии радона в атмосфере, характеризующий вертикальный конвективный перенос, m^2/c . На внутренней границе двух сред грунт – атмосфера выполняются условия непрерывности концентрации и потока радона:

$$C(z, t)|_{z=0-0} = C(z, t)|_{z=0+0}, \quad (3)$$

$$D_G \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0-0} - v_G C(z, t)|_{z=0-0} = D_A \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0+0},$$

а на внешних границах сред – краевые условия:

$$C \rightarrow C_\infty, \quad z \rightarrow -\infty, \quad C \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Получено аналитическое решение модели (2-4).

$$C(z, t) = C_\infty A \exp(-z\sqrt{\lambda/D_A}), \quad z > 0 \quad (5)$$

$$C(z, t) = C_\infty (1 - B \cdot c \cdot \exp(z\xi)), \quad z < 0$$

$$A = 1 - c \cdot (b - \sqrt{a} \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{at}) - b \exp((b^2 - a)t) \operatorname{erfc}(b\sqrt{t})) / (b^2 - a),$$

$$B = \frac{e^{-\sqrt{\tau \cdot a}} \operatorname{erfc}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{t}} - \sqrt{a \cdot t})}{2(b + \sqrt{a})} + \frac{e^{\sqrt{\tau \cdot a}} \operatorname{erfc}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{t}} + \sqrt{a \cdot t})}{2(b - \sqrt{a})} - \frac{be^{b\sqrt{\tau} + (b^2 - a)t} \operatorname{erfc}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{t}} + b\sqrt{t})}{b^2 - a},$$

$$a = \frac{v_G^2}{4D_G} + \lambda, \quad b = -\frac{v_G + 2\sqrt{D_A \lambda}}{2\sqrt{D_G}}, \quad c = \frac{v_G + \sqrt{D_A \lambda}}{\sqrt{D_G}},$$

$$\xi = \frac{v_G}{2D_G}, \quad \tau = z^2/D_G, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-x^2} dx.$$

Результаты расчета, согласно решению (5), приводят к тому, что значения концентрации радона на земной поверхности при $D_G = 2 \cdot 10^{-5} m^2/c$ и скорости адвекции $v_G > 10^{-6} m/c$, составляют 7% от C_∞ , а при диффузионном процессе $v_G = 0 m/c$ – 4% от C_∞ , при $v_G < 10^{-6} m/c$ и $D_G = 2 \cdot 10^{-5} m^2/c$ влияние диффузии усиливается над адвекцией, а в атмосфере значения концентрации радона такие же, как в случае $v_G = 0 m/c$.

В разделе 2.3 рассматривается модификация модели (2-4), согласно которой коэффициент диффузии радона в атмосфере представлен линейной функцией от высоты.

Радон является естественным ионизатором приземного слоя атмосферы и поэтому необходимо учитывать зависимость коэффициента диффузии радона в атмосфере, по крайней мере, от его высоты

$D_A(z) = D_A + v_A \cdot z$, где параметр v_A – скорость роста коэффициента диффузии радона в атмосфере, D_A – коэффициент диффузии радона у поверхности земли. Для данной модели найдено аналитическое решение, которое выражается в терминах специальной функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента нулевого $K_0(z)$ и первого $K_1(z)$ порядков соответственно:

$$C(z, t) = \frac{C_\infty A K_0(2/v_A \sqrt{\lambda(D_A + v_A z)})}{K_0(2/v_A \sqrt{\lambda D_A})}, \quad z > 0 \quad (6)$$

$$C(z, t) = C_\infty (1 - B \cdot c \cdot \exp(z\xi)), \quad z < 0$$

$$b = \frac{v_G K_0(2/v_A \sqrt{\lambda D_A}) - 2\sqrt{\lambda D_A} K_1(2/v_A \sqrt{\lambda D_A})}{2\sqrt{D_G} K_0(2/v_A \sqrt{\lambda D_A})},$$

$$c = \frac{v_G K_0(2/v_A \sqrt{\lambda D_A}) - \sqrt{\lambda D_A} K_1(2/v_A \sqrt{\lambda D_A})}{\sqrt{D_G} K_0(2/v_A \sqrt{\lambda D_A})}.$$

Согласно решению (6) вычисления приводят к тому, что с ростом параметра v_A увеличивается перенос радона по высоте. Например, при $v_A = 1$ м/с относительные значения концентрации радона на высоте 1500 метров в два раза меньше, чем на земной поверхности, а для случая $v_A = 0$ м/с – относительные значения концентрации уменьшаются в два раза на высоте 150 - 200 метров. С другой стороны рост коэффициента диффузии радона в атмосфере сопровождается уменьшением концентрации радона вблизи земной поверхности. В частности на поверхности земли при $v_A = 1$ м/с концентрация радона уменьшается на порядок, чем при параметре $v_A = 0$ м/с и составляет около (0.001 - 0.002)

В разделе 2.4 рассматривается применение классической модели диффузии-адвекции к задаче расчета плотности потока радона с поверхности земли и приводится алгоритм ее решения. Исследуются результаты тестирования алгоритма на сети станций мониторинга радона на Камчатке.

В эксперименте изучается поровая активность радона – количество частиц радона, распадающихся в единицу времени на единицу объема пор грунта и связана с концентрацией радона в грунте соотношением: $A(z, t) = \lambda C(z, t) / \eta$ где: $A(z, t)$ – поровая активность радона в грунте, Бк/м³; η – пористость грунта *от.ед.*

В работах Яковлевой В.С. показано, что в относительно однородных средах величина плотности потока радона с поверхности земли более динамична к изменению скорости адвекции, чем величина поровой активности радона в подпочвенном воздухе. Поэтому плотность потока радона может являться на территориях с относительно однородной геологической средой лучшим индикатором на изменения ее напряженно-деформированного состояния. Задача оценки плотности потока радона с поверхности земли заключается в решении уравнения (1) для поровой активности радона:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - D_G \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial z^2} + v_G \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \lambda (A(z, t) - A_\infty) = 0, \quad (7)$$

с начальным и граничным условиями:

$$A(z, 0) = A_\infty, \quad -D_G \eta \left. \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} + v_G \eta A(0, t) = q(t) \quad (8)$$

и известными значениями поровой активности радона на различных глубинах:

$$A(z_i, t_j) = A_{ij}^{obs}, \quad (9)$$

где $q(t)$ – плотность потока радона, которую требуется оценить, $A(z_i, t_j)$ – значения поровой активности радона на i -ой глубине в j -моменты времени.

Для задачи (7-9) был разработан алгоритм решения. Данный алгоритм можно разделить на следующие этапы:

1. Решение задачи (7-8) переноса радона в грунте постоянной плотностью потока радона $q(t) = q_c$, которое можно получить с помощью интегрального преобразования Лапласа и записать так:

$$A(z, t) = A_\infty + \frac{(v_G \eta A_\infty - q_c)}{\eta \sqrt{D_G}} B \exp(zv_G/(2D_G)) \quad (10)$$

Решение (10) описывает процесс изменения значений поровой активности радона в грунте под воздействием постоянной плотности потока q_c в моменты времени t . Если данное решение продифференцировать по q_c , то получится выражение для коэффициента чувствительности $\phi(z, t)$:

$$\phi(z, t) = -\frac{B \exp(zv_G/(2D_G))}{\eta \sqrt{D_G}}, \quad b = -\frac{v_G \eta}{2\sqrt{D_G}} \quad (11)$$

Так как коэффициент чувствительности $\phi(z, t)$ не зависит от $q(t)$, то задача оценивания плотности потока радона является линейной и, следовательно, можно применять к решению (10) принцип суперпозиции.

2. Представление полученного решения (10) в виде суперпозиции его элементарных блоков;

$$A(z, t_M) = A_\infty + \sum_{n=1}^M q_n \Delta \phi(z, t_{M-n}), \quad (12)$$

$$\Delta \phi(z, t_{M-n}) = \phi(z, t_{M-n+1}) - \phi(z, t_{M-n}).$$

3. Минимизацию функционала невязки между измеренной (9) и рассчитанной по модели (7-8) с учетом (12) значениями поровой активности радона в J точках.

$$q(t_M) = \frac{\sum_{j=1}^J \left(A^{obs}(z_j, t_M) - \sum_{i=1}^{M-1} q(z_j, t_i) \Delta \phi(z_j, t_{M-i}) - A_\infty \right) \phi(z_j, t)}{\sum_{k=1}^J \phi^2(z_j, t)} \quad (13)$$

Алгоритм (13) реализован в созданной автором программе «РЭКСЭМ». Программа прошла тестирование на сети станций по мониторингу радона на Петропавловск - Камчатском геодинамическом

полигоне. В ходе проверки программы был подтвержден тезис о перспективности использования плотности потока радона в исследовании аномалий, которые возникают в результате геодинамических процессов, происходящих в земной коре.

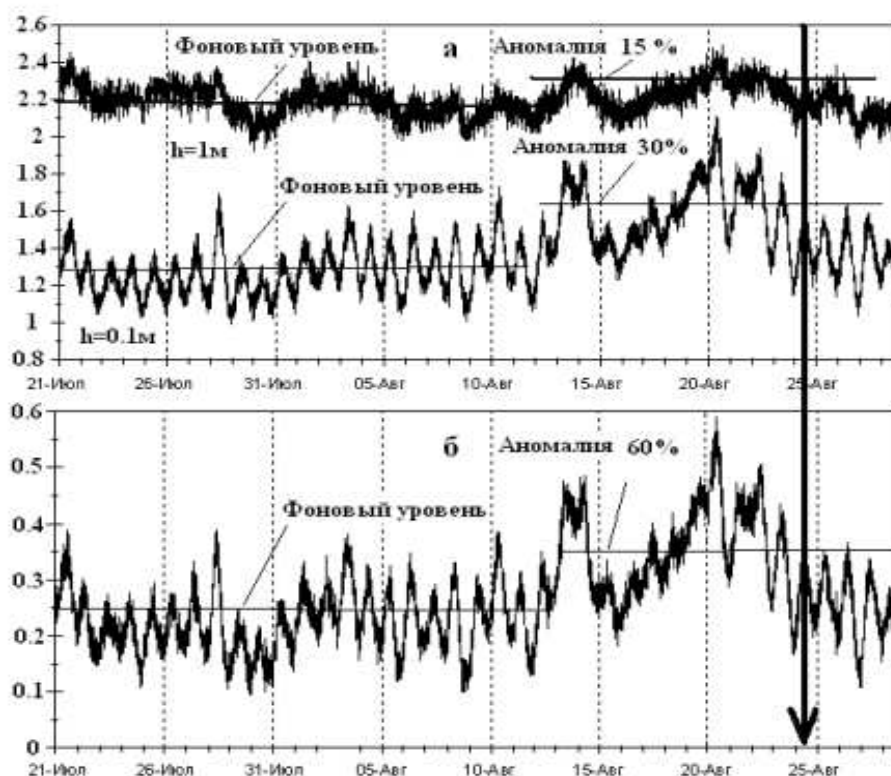


Рис. 1. а - динамика поровой активности радона на глубине расположения датчика 1.0 м (1) и 0.1 м (2); б – вычисленная плотность потока радона. Стрелкой отмечено землетрясение с $M = 6.2$, $R = 190$ км.

Например, перед землетрясением с магнитудой $M = 6.2$, произошедшим 24 августа 2006 года на удалении 190 км от пункта наблюдения, прослеживается аномалия, характеризующаяся возрастанием значений объемной (поровой) активности радона на поверхности грунта не более 30% от фона (рис.1а). В то время как расчетные значения плотности потока радона по предложенной методике возрастают почти в три раза (от 0.1 до 0.3 $мБк/(м^2 \cdot с)$) (рис.1б).

В третьей главе с помощью дробного исчисления и свойств функции Миттаг-Леффлера разработаны модели переноса радона в режимах аномальной диффузии и адвекции в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт обладает фрактальными свойствами. Получены аналитические решения этих моделей, которые выражаются в терминах функции Миттаг-Леффлера.

В разделе 3.1 даются физические аспекты теории переноса в грунте с фрактальной структурой. Выводится основное уравнение переноса в такой среде и формулируется постановка задачи.

Пористый грунт, как правило, имеют фрактальную организацию. В такой среде существует степенное распределение пор по размерам, которое сохраняется при различных масштабах с некоторым показателем α . Известно, что если параметр α изменяется в диапазоне $1 < \alpha < 2$, то перенос происходит в режиме аномальной диффузии (супердиффузии). В этом случае частицы совершают скачки (полеты Леви) на значительные расстояния в пористом грунте за счет сложной топологии его пор, при этом увеличивается интенсивность процесса переноса. Интересно отметить, что при $\alpha=2$ массоперенос идет в режиме обычной диффузии, а при $\alpha=1$ – в режиме обычной адвекции.

Однако возможен другой диапазон значений α , а именно $0 < \alpha < 1$. В этом случае будет происходить перенос радона гораздо более интенсивно, чем при аномальной диффузии за счет изменения фрактальных структур грунта, вызванное деформационными возмущениями. Так как в литературе такой режим не рассматривался в моделировании массопереноса, то автором диссертационной работы предложено определять его термином – аномальная адвекция.

Наиболее подходящим математическим аппаратом для построения моделей массопереноса в средах с фрактальной организацией является аппарат дробного интегро – дифференцирования. С помощью данной теории основное уравнение переноса радона в грунте с фрактальными свойствами можно записать в виде:

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} - D_\alpha \frac{\partial^\alpha C(z, t)}{\partial z^\alpha} + v_G \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} + \lambda (C(z, t) - C_\infty) = 0, \quad (14)$$

D_α – обобщенный коэффициент диффузии, зависящий от фрактальных свойств грунта, m^α/c . В постановке задачи были сделаны следующие допущения: адвекция отсутствует и рассматривается только стационарный процесс, ось z направлена вглубь земной поверхности. Согласно данным допущениям, уравнение (14) с учетом стока радона в атмосферу перейдет в следующее уравнение:

$$\begin{aligned} D_A \frac{d^2 C(z)}{dz^2} - \lambda C(z) &= 0, \quad z < 0 \\ D_\alpha d_{0z}^\alpha C(z) - \lambda (C(z) - C_\infty) &= 0, \quad z > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

вместо граничных условий (5) будем иметь нелокальные условия:

$$\lim_{z \rightarrow 0+0} d_{0z}^{\alpha-2} C(z) = C(z)|_{z=0-0}, \quad D_\alpha \lim_{z \rightarrow 0+0} d_{0z}^{\alpha-1} C(z) = D_A \frac{dC(z)}{dz} \Big|_{z=0-0}, \quad (16)$$

Краевые условия на внешних границах запишутся:

$$C \rightarrow C_\infty, \quad z \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (17)$$

где d_{0z}^α – оператор Римана-Лиувилля производной дробного порядка α ($1 < \alpha < 2$), который действует по следующему правилу: $d_{0z}^\alpha C(z) =$

$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dz^2} \int_0^z \frac{C(\xi)d\xi}{(z-\xi)^{\alpha-1}}$. Краевые условия на внешних границах (4) остаются без изменений.

В главе 3.2 получено аналитическое решение модели аномальной диффузии (15,16,17) при $1 < \alpha < 2$, которое выражается в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера. С помощью данного решения строятся и исследуются кривые распределения концентрации радона в грунте и приземном слое атмосферы.

Решение модели (15,16,17) можно получить с помощью преобразования Лапласа и свойств функции Миттаг-Леффлера в такой форме:

$$C(z) = C_\infty \exp(\sqrt{\lambda/D_A} z) \mu^{1-1/\alpha} / (\mu^{1/\alpha} + \sigma), \quad z < 0 \quad (18)$$

$$C(z) = C_\infty \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} (\sigma z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu z^\alpha) + z^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(\mu z^\alpha)) / (\mu^{1/\alpha} + \sigma) \right] - C_\infty E_{\alpha,1}(\mu z^\alpha), \quad z > 0$$

где, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\alpha k + \beta)$ – специальная функция Миттаг-Леффлера, $\mu = \lambda/D_\alpha$, $\sigma = \sqrt{\lambda D_A}/D_\alpha$.

На рис.2 показано, что кривые распределений концентрации радона в грунте перегруппировываются на некоторой глубине в обратный порядок и с уменьшением α «вытягиваются». Этот эффект означает, что длина диффузии увеличилась и радон «легче» проникает сквозь пористый грунт.

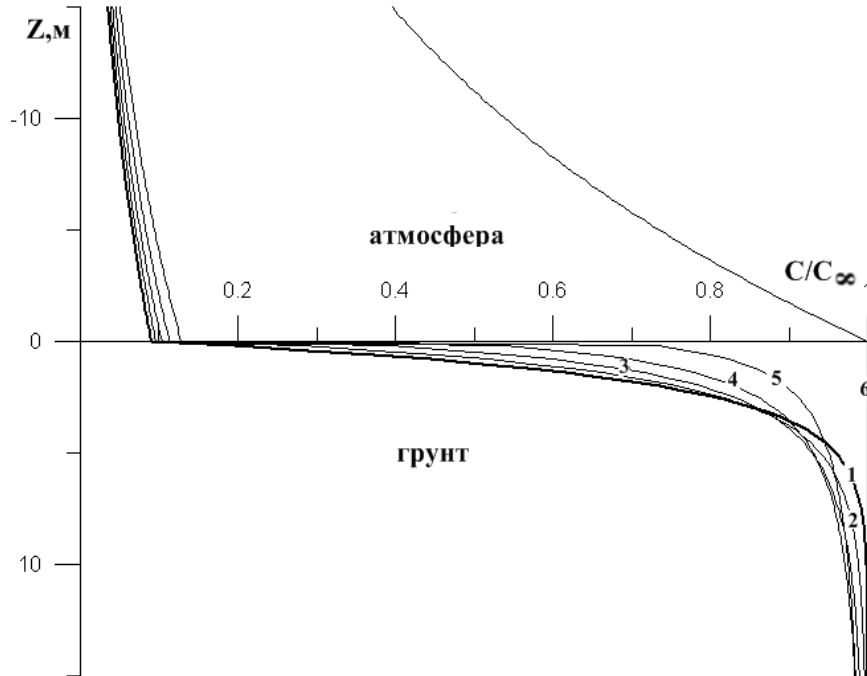


Рис. 2. Кривые распределений концентрации радона в грунте и в атмосфере в зависимости от параметра α : 2 (1); 1.8 (2); 1.6 (3); 1.4 (4); 1.2 (5); 1 (6).

В разделе 3.3 получено аналитическое решение модели аномальной адвекции (15,16,17) в случае, когда $0 < \alpha < 1$. С помощью данного решения

строятся и исследуются кривые распределения радона в грунте и приземном слое атмосферы.

В теории массопереноса в средах с фрактальными свойствами рассматривается, как правило, аномальная диффузия $1 < \alpha < 2$. Однако возможен и другой диапазон изменения этого параметра, когда $0 < \alpha < 1$. В этом случае меняется тип уравнения в грунте, что соответствует переходу аномальной диффузии в аномальную адвекцию. При этом параметр D_α будет играть роль скорости адвекции в грунте. При таком переходе граничное условие останется единственным $\lim_{z \rightarrow 0+0} d_{0z}^{\alpha-1} C(z) = C(z)|_{z=0-0}$, а оператор Римана-Лиувилля запишется следующим образом: $d_{0z}^\alpha C(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{C(\xi) d\xi}{(z-\xi)^\alpha}$. Решение такой задачи можно получить в терминах функции Миттаг-Леффлера:

$$\begin{aligned} C(z) &= C_\infty \mu^{1-1/\alpha} \exp\left(\sqrt{\lambda/D_A} z\right), \quad z < 0, \\ C(z) &= C_\infty \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu z^\alpha) - E_{\alpha,1}(\mu z^\alpha)\right], \quad z > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При значении $\alpha=1$ решения (18) и (19) перейдут в константу $C(z) = C_\infty$. Это означает, что происходит обычный перенос радона со скоростью $D_1 = v_G$. При значении $\alpha=2$ будет происходить обычная диффузия с коэффициентом диффузии $D_2 = D_G$.

Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$ в уравнении (10) появляется дополнительный фактор, влияющий на изменение концентрации радона. Действительно, если рассмотреть предельный случай в выражении (15) и положить $\alpha=0$, то получим отсутствие переноса и рост или уменьшение концентрации радона в зависимости от соотношения параметров D_α и λ . Таким образом, случай $0 < \alpha < 1$ описывает не только процесс переноса, но еще и дополнительное выделение радона из поровых фрактальных структур грунта.

В разделе 3.4. проводится сопоставление экспериментальной кривой с расчетной кривой, построенной по модели аномальной диффузии (супердиффузии). В работе А.А. Спивака и др. (2008) приведены экспериментальные данные по регистрации радона на глубинах 0.8, 5.5, 9 и 11.5 м, которые приведены на рис.3а (кривая 1).

В диссертации с помощью решения такой модели было рассчитано семейство кривых с различными значениями параметра α , при этом считалось, что на земной поверхности значение поровой активности радона равно нулю, а значение $A_\infty = 2.5 \text{ kBк/м}^3$, близким к значению A_∞ для экспериментальных данных. Как показано на рис. 3а, кривая, проведенная через экспериментальные точки, заключена между кривыми с параметром $\alpha=1.4-2$.

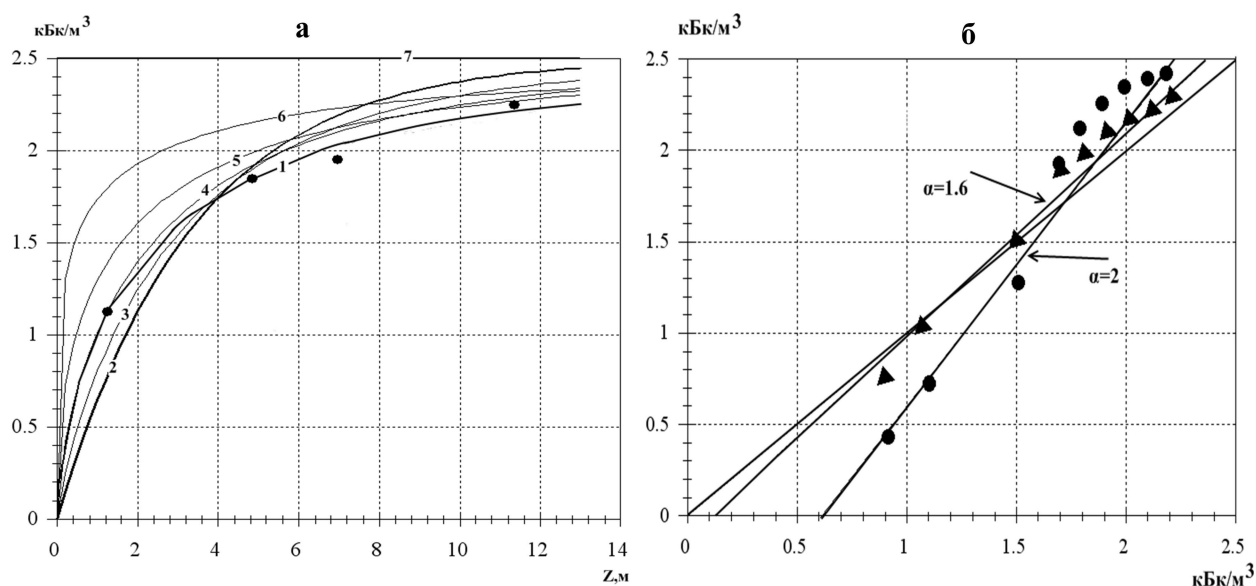


Рис. 3. Кривая распределения концентрации радона по глубине (кривая 1), проведенная через экспериментальные точки и семейство расчетных кривых концентрации радона во фрактальной среде с $A_{\infty} = 2.5 \text{ кБк/м}^3$ в зависимости от параметра α (а): экспериментальная кривая (1), 2 (2), 1.8 (3), 1.6 (4), 1.4 (5), 1.2 (6), 1 (7). Корреляционное поле между значениями поровой активности радона экспериментальной кривой и значениями расчетных кривых с $\alpha=2$ и $\alpha=1.6$ (б).

Наилучшее совпадение экспериментальной кривой с расчетной кривой наблюдается при $\alpha=1.6$. На рис.3б, приведено корреляционное поле между значениями объемной активности радона экспериментальной кривой и значениями расчетных кривых с $\alpha=2$ и $\alpha=1.6$. На рисунке показано, что экспериментальная кривая располагается ближе к кривой $\alpha=1.6$, по сравнению с кривой для обычной диффузии $\alpha=2$, а это указывает на то, что грунт может обладать фрактальными свойствами.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы:

1. На основе анализа классической модели диффузии-адвекции радона в системе «грунт-атмосфера»:
 - определены условия перехода от режима адвекции к режиму диффузии:
 - разработана оригинальная модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера», где коэффициент диффузии радона в атмосфере представлен линейной функцией от ее высоты. Получено аналитическое решение такой модели, которое выражается через функцию Бесселя второго рода. Показано, что за счет увеличения коэффициента диффузии радона в атмосфере, на границе раздела сред на порядки уменьшается концентрация радона и увеличивается перенос радона по высоте.

- Разработан алгоритм расчета плотности потока радона с поверхности земли по экспериментальным данным временных рядов радоновых полей, реализованный в компьютерной программе «РЭКСЭМ». Подтверждено, что плотность потока радона является наиболее динамичной характеристикой к изменению скорости адвекции, чем величина поровой активности радона.
2. С помощью дробного интегро-дифференцирования и свойств функции Миттаг-Леффлера разработан новый подход к изучению переноса радона в системе «грунт-атмосфера», когда грунт обладает фрактальными свойствами. Согласно данному подходу были получены следующие результаты:
- Разработана оригинальная модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера», где грунт обладает фрактальными свойствами, в режиме аномальной диффузии (супердиффузии). Найдены решения в рамках этой модели в терминах функции Миттаг-Леффлера.
 - Показано с помощью экспериментальных данных и расчетов по модели супердиффузии, что грунт может обладать фрактальными свойствами.
 - Впервые построена модель переноса радона в системе «грунт-атмосфера» в режиме аномальной адвекции и получено аналитическое решение в терминах функции Миттаг-Леффлера. Показана высокая интенсификация выделения радона в поры грунта и переноса по сравнению с режимом супердиффузии.
 - Исследованы особенности смены режимов аномальной диффузии и адвекции в зависимости от фрактальных свойств пористого грунта.
 - Проведено сопоставление полученных неклассических решений с экспериментальными данными и показано, что возможен перенос радона в грунте в режимах как обычной, так и аномальной диффузии.

Основное содержание диссертационной работы изложено в следующих работах:

1. **Паровик, Р.И.** Моделирование процессов переноса радона в средах с фрактальной структурой / Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов // Математическое моделирование. – 2009. – № 8. – Т. 21. – С. 30-36
2. **Паровик, Р.И.** Обобщенная одномерная модель массопереноса радона ($\text{Oa } ^{222}\text{Rn}$) и его эксхалиция в приземный слой атмосферы / Р.И. Паровик, И.А., Ильин, П.П. Фирстов // Математическое моделирование. – 2007. – № 11. – Т. 19. – С. 43–50.
3. **Паровик, Р.И.** Математическая диффузионная модель массопереноса радона ($\text{Oa } ^{222}\text{Rn}$) в грунте и его эксхалиции в приземном слое атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле. – 2006. – № 1. – Вып. 7. – С. 110–114.

4. **Паровик, Р.И.** Модель массопереноса радона (ОА ^{222}Rn) в приземном слое атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле. – 2006. – № 2. – Вып. 8. – С. 128–133.
5. **Паровик, Р.И.** Моделирование процессов переноса радона ^{222}Rn в средах с фрактальной структурой и его стока в приземный слой атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле. – 2008. – № 1. – Вып. 12. – С. 188–193.
6. **Паровик, Р.И.** Алгоритм расчета плотности потока радона с поверхности Земли / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Вестник ТГУ. Серия Математика и Механика. – 2008. – №3(4). – С. 96–102.
7. **Паровик, Р.И.** Модель переноса радона (^{222}Rn) в режиме супердиффузии во фрактальной среде / Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов, П.П. Фирстов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. – 2008. – № 2. – Т. 10. – С. 79–85.
8. **Паровик, Р.И.** Исследование кинематических и динамических параметров эманации подпочвенного радона в период активации сейсмичности Камчатки в августе 2006 г. / П.П. Фирстов, Е.А. Пономарев, Н.В. Чернева, Р.И. Паровик // Солнечно-земные связи и предвестники землетрясений: IV международной конференции. 14–17 августа 2007 г. с. Паратунка, Камчатский край, сб. докл. – Петропавловск-Камчатский: ИКИР ДВО РАН, 2007. – С. 464–469.
9. **Паровик, Р.И.** Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 8329. Программа обработки геофизических данных «РЭКСЭМ» / Р.И. Паровик. – Зарегистрирована в Отраслевом фонде алгоритмов и программ 23.05.2007, номер государственной регистрации. №50200701049. – М., 2007.
10. **Паровик, Р.И.** «РЭКСЭМ» – оценка вариаций плотности потока радона (^{222}Rn) с поверхности Земли по экспериментальным данным на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Сборник лучших проектов VIII Всероссийской выставки научно-технического творчества молодежи. 25–28 июня 2008. – Москва: ВВЦ, 2008. – С. 151–152.
11. **Паровик, Р.И.** Моделирование процесса массопереноса радона (^{222}Rn) в приземную атмосферу // Современные проблемы геофизики: Материалы IX Уральской молодежной научной школы по геофизике, Екатеринбург, 24–28 марта 2008 г. – Екатеринбург: ИГф УРО РАН, 2008. – С. 139–142.
12. **Паровик, Р.И.** Модель массопереноса радона (^{222}Rn) в приземную атмосферу с коэффициентом турбулентной диффузии как линейной функции от высоты / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Солнечно-земные связи и предвестники землетрясений: IV международная научная конференция. 14–17 августа 2007 г., с. Паратунка, Камчатский край, сб. докл. – Петропавловск-Камчатский: ИКИР ДВО РАН, 2007. – С. 336–340.

13. **Паровик, Р.И.** Оценка плотности потока и скорости переноса радона (^{222}Rn) в рыхлых отложениях на Петропавловск - Камчатском геодинамическом полигоне / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Информационные и коммуникационные технологии в образовании и научной деятельности: Сборник докладов Межрегиональной научно-практической конференции, Хабаровск, 21–23 мая 2008 г. – Хабаровск: ТОГУ, 2008. – С. 312–318.
14. **Паровик, Р.И.** Алгоритм расчета плотности потока радона (^{222}Rn) с поверхности земли / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Тез. докл. Международной конференции Математическое моделирование опасных природных явлений и катастроф, посвященной 130-летию Томского государственного университета, Томск, 30 июня–04 июля 2008 г. – Томск: ТГУ, 2008. – С. 85.
15. **Паровик, Р.И.** Исследование динамики плотности потока радона с поверхности грунта на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Тез. докл. III Сахалинской молодежной научной школы. Природные катастрофы: изучение, мониторинг, прогноз, Южно-Сахалинск, 3–6 июня 2008 г. – Южно-Сахалинск: ИМГиГ, 2008. – С. 9–10.
16. **Паровик, Р.И.** Массоперенос радона // Материалы VI Всероссийской выставки научно-технического творчества молодёжи НТТМ – 2006, Москва, 20–24 июня 2006. – Москва: ОАО «ГАО ВВЦ», 2006. – С. 26.
17. **Паровик, Р.И.** Методика расчета плотности потока радона ($\text{Oa } ^{222}\text{Rn}$) с поверхности Земли // Современные научные технологии для научных исследований: Материалы Всероссийской конференции, Магадан, 24–26 апреля 2008. – Магадан: СВНЦ ДВО РАН, 2008. – С. 194–195.
18. **Паровик, Р.И.** Методика регистрации радона (^{222}Rn) на Петропавловск - Камчатском геодинамическом полигоне / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Труды первой региональной научно-технической конференции: Проблемы комплексного геофизического мониторинга Дальнего Востока России, Петропавловск-Камчатский, 11-17 ноября 2007. – Петропавловск-Камчатский: КФ ГС РАН, 2008. – С. 203–207.
19. **Паровик, Р.И.** Применение математических методов для обработки данных мониторинга почвенного радона с целью поиска предвестников сильных землетрясений / Р.И. Паровик, А.Б. Тристанов, Ю.А. Филиппов, П.П. Фирстов // Материалы Всероссийской конференции, Магадан, 24–26 апреля 2008. – Магадан: СВНЦ ДВО РАН, 2008. – С. 171–173.
20. **Паровик, Р.И.** Моделирование процессов переноса радона (^{222}Rn) во фрактальной среде / Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов, П.П. Фирстов // Сб. тр. Конференции «Сергеевские чтения». Моделирование при

решение геоэкологических задач, Москва, 23-24 марта 2009 г. - Москва: ИГЭ РАН, 2009. - Вып. 11. - С. 396-399.

21. **Паровик, Р.И.** Режимы переноса радона во фрактальной среде со стоком в приземный слой атмосферы // Материалы VI региональной молодежной научной конференции «Исследования в области наук о Земле», Петропавловск-Камчатский, 26-27 ноября 2008. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. В. Беринга, 2008. – С. 65–71.
22. **Паровик, Р.И.** Нелокальные модели переноса радона (^{222}Rn) в системе грунт - атмосфера / Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов, Фирстов П.П. // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VII Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», Нальчик-Эльбрус, 17-22 мая 2009 г. – Нальчик: КБНЦ РАН, 2009. - С. 185–187.

Математическое моделирование процессов переноса
радона в системе «ГРУНТ-АТМОСФЕРА»

Формат 30x42. 1/4. Усл. печ. л. 1,0.

Бумага офсетная. Заказ №308. Тираж 100 экз.

И.П. "Полиграфия". Лицензия № 15 от 22.01.03г.

КБР. г. Нальчик, ул. Чернышевского, 131.