

На правах рукописи



Фещенко Любовь Константиновна

## Маломодовая модель геодинамо

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

### АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре  
2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (ИКИР ДВО РАН).

**Научный руководитель:** кандидат физико-математических наук, доцент **Водинчар Глеб Михайлович**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник **Коробейников Сергей Николаевич**

кандидат физико-математических наук, доцент **Ильин Игорь Александрович**

**Ведущая организация:** Учреждение Российской академии наук **Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, г. Красноярск**

Защита состоится «25» ноября 2011 года в 10<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.092.03 при Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете (ФБГОУ ВПО «КнАГТУ») по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27, ФБГОУ ВПО «КнАГТУ».

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФБГОУ ВПО «КнАГТУ».

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенных печатью, просим направлять по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27, ФБГОУ ВПО «КнАГТУ».

Автореферат разослан «20» октября 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент



Зарубин М.М.

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Проблема генерации магнитного поля Земли и планет является одной из основных в гео- и планетофизике. Несмотря на успехи достигнутые в теории геомагнетизма проблему происхождения магнитного поля Земли (и других космических объектов) нельзя считать полностью решенной. Свидетельством тому является интенсивный и неослабевающий поток публикаций по данной тематике.

Наибольшее признание в настоящее время имеет динамо-теория формирования и поддержания магнитного поля плането- и астрофизических объектов. В рамках этой теории механизм самогенерации магнитного поля обеспечивается тепловой и концентрационной конвекцией проводящей жидкости. Основополагающие работы теории динамо принадлежат Я. Френкелю, У. Эльзассеру, Е. Булларду, Е. Паркеру. Значительным результатом в теории динамо было получение ряда ограничений на структуру поля скорости, которое может генерировать магнитное поле (теорем запрета). Эти ограничения определяют принципиальную трехмерность математической задачи геодинamo, что вместе с квадратичной нелинейностью уравнений магнитной гидродинамики создает большие математические сложности. Точное решение уравнений геодинamo неизвестно, поэтому различными авторами исследуются различные приближенные решения на предмет генерации геомагнитного поля близкого по морфологии к наблюдаемому. Подробные обзоры зарубежных работ по геодинamo на начало века выполнены в [1] и [2]. В России и СССР результаты, связанные с проблемой геодинamo, получены в работах Я.И. Френкеля, Я.Б. Зельдовича, С.И. Брагинского, Б.А. Тверского, С.И. Вайнштейна, Д.Д. Соколова, П.Г. Фрика, М.Ю. Решетняка, А.П. Ануфриева, А.М. Шукурова и др.

Помимо работ посвященных динамо звезд и планет, необходимо упомянуть работы по гидродинамике земных недр. Проблемы геофизической гидродинамики в СССР и России разрабатывались в школах академиков Г.С. Голицына, А.С. Моница, В.П. Мясникова.

Г.С. Голицыным было проведено общее описание различных возможных конвективных режимов вращающихся объектов и дана классификация этих режимов, и для жидкого ядра Земли получены оценки характерной скорости конвекции  $10^{-4}$  м/с, дана оценка для магнитного числа Рейнольдса  $Re_m = 60$ , что с запасом обеспечивает условие действия геодинamo  $Re_m \gg 1$ .

В.П. Мясниковым была разработана гидродинамическая модель эволюции Земли. Предложен аналитический подход к решению общей системы эволюционных уравнений, основанный на допущении о малости отклонений искомых функций от сферически симметричных распределений. Анализ модели привел к принципиальному выводу – Земля всегда состоит из набора оболочек, а ее эволюция – это медленное изменение толщины

оболочек, их химического состава и распределения температуры.

Общепризнанно, что магнитное поле является одним из основных факторов, определяющих эволюцию Земли в целом и эволюцию биологической жизни в частности. Создавая естественный экран от жесткого космического и прежде всего солнечного излучения магнитное поле необходимо для существования жизни. Исследования в области геодинамики также важны и для изучения космического магнетизма в целом, поскольку механизм формирования магнитных полей у разных планет и звезд не должен принципиально отличаться.

Для выделения из множества вариантов приближенных решений уравнений геодинамики тех, которые описывают реально существующее поле необходимо учитывать косвенную информацию о пространственной структуре конвекции в жидком ядре Земли. Такую информацию дает детальный анализ собственных колебаний Земли после сильнейших землетрясений. Знание крупномасштабной пространственной структуры конвекции позволяет построить маломодовую модель геодинамики в которой обеспечивается поддержание поля дипольного типа.

**Объектом исследования** является главное магнитное поле Земли, механизм его формирования и поддержания на характерных временах порядка сотен тысяч лет.

**Предметом исследования** является математическая модель динамики-механизма поддержания геомагнитного поля, учитывающая имеющиеся косвенные данные о распределении плотности вещества в жидком ядре и крупномасштабной структуре конвекции.

**Целью работы** является разработка и исследование маломодовой модели геодинамики, согласующейся с имеющимися данными о распределении плотности в ядре Земли и крупномасштабной пространственной структуре конвекции.

Для достижения цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- 1) методами теории гидродинамической устойчивости обосновать возникновение косвенно наблюдаемых крупномасштабных структур;
- 2) исследовать влияние вращения на условия возникновения этих структур;
- 3) рассчитать базисные системы поля для разложения температуры, скорости и магнитной индукции с целью изучения модели геодинамики спектральными методами;
- 4) изучить структуру собственных значений и полей соответствующих спектральных задач;

- 5) произвести селекцию мод для построения модели геодинамо, учитывающую косвенно наблюдаемую конвективную структуру;
- 6) изучить возможность поддержания в модели дипольной компоненты магнитного поля, величина которой близка к реальной.

### **Научная новизна исследования:**

- 1) впервые предложена маломодовая модель, отражающая косвенные данные о распределении плотности в жидком ядре Земли;
- 2) показано существование в модели устойчивых квазистационарных режимов, в которых величина вертикального диполя близка к наблюдаемой для магнитного поля Земли, а характерные скорости течений совпадают по порядку величин с имеющимися оценками.
- 3) построено обобщение модели Лореца маломодовой конвекции в плоском слое на сферические невращающуюся и вращающуюся оболочки;
- 4) получено решение спектральной задачи  $\text{rot } \Delta \mathbf{S} + \mu \text{rot} \mathbf{S} = 0$  в сферической оболочке в классе полоидальных полей нулевых на границе, доказана ортогональность системы собственных полей.

**Достоверность результатов.** Исследования базируются на классических моделях конвекции и магнитной гидродинамики, используют аппарат векторного и функционального анализа, методы теории устойчивости, известные алгоритмы вычислительной математики. Для получения маломодовой модели использовался один из вариантов метода взвешенных невязок, являющийся некоторым обобщением классического метода Галеркина. Показано, что характерная скорость конвекции и величина вертикального диполя в модели согласуются с имеющимися данными наблюдений.

**Практическая ценность.** Работа выполнена по планам научных исследований Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 16 "Изменение окружающей среды и климата: природные катастрофы", по проекту Президиума ДВО РАН 10-III-B-07-158 "Моделирование магнитогидродинамической конвекции во вращающихся сферических оболочках", в рамках соисполнения по темплану НИР Камчатского государственного университета им. Витуса Беринга (НИР № 01201052397 "Моделирование конвекции в сферических оболочках на основе распределенных систем символьных вычислений").

Разработанная модель содержит минимальное число мод и может служить основой для разработки более сложных моделей, отражающих

различные черты морфологии геомагнитного поля и расчетов различных возможных вариантов его эволюции.

**Личный вклад.** Автором исследованы конвективные режимы в маломодовой модели конвекции во вращающейся сферической оболочке. Установлена невозможность поддержания в этой модели стационарных режимов. Найдены точки покоя в маломодовой модели геодинамо, установлена их неустойчивость в линейном приближении. Рассчитаны фазовые траектории в маломодовой модели геодинамо, показана их устойчивость на характерных временах порядка сотен тысяч лет. Рассчитаны базисные системы полей для разложения температуры, скорости и магнитной индукции. Доказана ортогональность системы собственных полей спектральной задачи  $\text{rot } \Delta \mathbf{S} + \mu \text{rot} \mathbf{S} = 0$  в сферической оболочке в классе полоидальных полей нулевых на границе.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Обобщение модели Лоренца маломодовой конвекции в плоском слое на сферическую оболочку, выражение для критического значения числа Релея в зависимости от относительной толщины оболочки.
2. Маломодовая модель геодинамо, поля скоростей которой согласованы с данными о структуре конвекции.
3. Рассчитанные в рамках модели квазистационарные режимы, устойчивые на характерных временах порядка сотен тысяч лет, в которых величина вертикального диполя близка к наблюдаемой для магнитного поля Земли, а характерные скорости течений совпадают по порядку величин с имеющимися оценками.

**Апробация работы.** Основные результаты и выводы, приведенные в диссертации, докладывались и обсуждались на конференциях:

1. V Международная конференция "Солнечно-земные связи и физика предшественников землетрясений", Камчатский край, Елизовский район, п. Паратунка, 2010;
2. IX Всероссийская выставка научно-технического творчества молодежи "НТТМ-2008", г. Москва, 2008;
3. Всероссийский научный симпозиум "Проблемы синергетики и коэволюции геосфер", г. Саратов, 2008;
4. XI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, г. Красноярск, 2010;

5. VI Региональная молодежная научная конференция "Исследования в области наук о Земле" (география, геология, геофизика, геоэкология, вулканология), г. Петропавловск Камчатский, 2008;
6. XI Уральская молодежная научная школа по геофизике. г. Екатеринбург, 2010.

Также результаты обсуждались на семинарах в Институте космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Институте вычислительного моделирования СО РАН, на кафедрах прикладной математики и физики в Камчатском государственном университете им. Витуса Беринга.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, в том числе 2 статьи в ведущих рецензируемых журналах, входящих в список ВАК, 9 статей в журналах, материалах и трудах конференций, 3 программных разработки, зарегистрированные в Государственном информационном фонде неопубликованных документов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического указателя, содержащего 59 ссылок и приложения. Объем диссертации – 115 листов, включая 14 рисунков и 8 таблиц.

## Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель исследования и основные задачи, указаны методы исследования, научная новизна и практическая значимость работы, личный вклад автора. Проведен краткий обзор литературы по гидродинамике сферической оболочки и проблеме геодинamo. Описана структура диссертации и кратко изложено содержание ее глав.

В **первой главе** рассматриваются условия возникновения конвекции в сферической оболочке  $D$  вязкой жидкости.

Для построения модели геодинamo, содержащей по возможности минимальное число мод, потребовалось предварительно изучить конвекцию в оболочке на языке простейшей модели типа модели Лоренца конвекции в плоском слое. Рассматривается конвекция в центральном поле тяготения с линейным по радиусу ускорением. Заданы значения температуры  $T_1$  и  $T_2 = T_1 - \delta T$  на внутренней  $r = r_1$  и внешней  $r = r_2$  границах оболочки соответственно.

Уравнения конвекции в приближении Буссинеска в безразмерных

переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) &= \operatorname{rot} \Delta \mathbf{v} - \operatorname{Ra} \operatorname{Pr}^{-1} \operatorname{rot} \left( \frac{T}{r_2} \mathbf{r} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T - r_1 r_2 \frac{v_r}{r^2} &= \operatorname{Pr}^{-1} \Delta T, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь первое уравнение – это уравнение Навье-Стокса, к которому применен оператор ротора для исключения из системы поля давления. Второе – это уравнение теплопроводности, третье – уравнение неразрывности (жидкость несжимаемая). Система записана относительно отклонения  $T$  температуры от стационарного гиперболического по радиусу профиля. С этим связано наличие третьего слагаемого в левой части уравнения теплопроводности.

Управляющими параметрами являются число Релея  $\operatorname{Ra} = \delta T g_2 h^3 \beta / (\nu k)$  и число Прандтля  $\operatorname{Pr} = \nu / k$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $\beta$  – коэффициент объемного расширения,  $h = r_2 - r_1$  – толщина оболочки,  $g_2$  – ускорение свободного падения на внешней границе оболочки.

Система (1) дополняется граничными условиями:

$$T|_{r=r_1} = T|_{r=r_2} = 0, \quad \mathbf{v}|_{r=r_1} = \mathbf{v}|_{r=r_2} = \mathbf{0}.$$

Исследование системы (1) проводилось спектральными методами, где базисные поля раскладывались на стационарные базисные моды, удовлетворяющие однородным граничным условиям с зависящими от времени амплитудами.

Для представления температуры рассматривалось гильбертово пространство  $H_1$  скалярных полей удовлетворяющих условию  $\Phi|_{\partial D} = 0$  со скалярным произведением  $\langle \Phi, \Psi \rangle_1 = \int_D \Phi \Psi dV$ , где интегрирование ведется по объему оболочки. Для представления скорости рассматривалось пространство  $H_2$  соленоидальных векторных полей нулевых на границе оболочки со скалярным умножением  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = \int_D \mathbf{u} \mathbf{v} dV$ . Это пространство разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств  $H_T \oplus H_S$ , где  $H_T$  и  $H_S$  – подпространства тороидальных и полоидальных полей соответственно. Тороидальное поле определяется как  $\mathbf{T}_\Phi = \operatorname{rot} (\Phi \mathbf{r})$ , а полоидальное – как  $\mathbf{P}_\Psi = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\Psi \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус вектор, а  $\Phi$  и  $\Psi$  – произвольные скалярные функции.

С учетом геометрии области поля системы (1) раскладывались по сферическим гармоникам  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ . Для температуры  $T = \sum_{k,n,m} \alpha_{knm}(t) T_{knm}(r, \theta, \varphi)$ , где  $T_{knm} = R_{knm}(r) Y_n^m(\theta, \varphi)$ . В



соленоидальном поле скорости выделялись тороидальная и полоидальная части. При этом тороидальная часть скорости  $\mathbf{v}^T = \sum_{k,n,m} \beta_{knm}^T(t) \mathbf{v}_{knm}^T(r, \theta, \varphi)$ , где  $\mathbf{v}_{knm}^T = \text{rot} (R_{knm}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r})$ , а полоидальная

часть  $\mathbf{v}^S = \sum_{k,n,m} \beta_{knm}^S(t) \mathbf{v}_{knm}^S(r, \theta, \varphi)$ , где  $\mathbf{v}_{knm}^S = \text{rot rot} (R_{knm}^S(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r})$ .

Радиальные функции  $R_{knm}$  и  $R_{knm}^T$  выбирались таким образом, чтобы соответствующие моды  $T_{knm}$  и  $\mathbf{v}_{knm}^T$  были бы собственными полями оператора Лапласа в соответствующих подпространствах. Выбор этих систем для разложения обусловлен присутствием члена, содержащего оператор Лапласа в уравнении Навье-Стокса и уравнении температуропроводности. Кроме этого, из третьей формулы Грина легко получается, что оператор Лапласа в подпространствах  $H_1$  и  $H_T$  самосопряженный и системы полей  $T_{knm}$  и  $\mathbf{v}_{knm}^T$  ортогональны в оболочке. Расчет полей  $\mathbf{v}_{knm}^T$  опирался на доказанную в диссертации

**Теорему 1.** Поле  $\mathbf{T}_\Phi$  является решением задачи  $\Delta \mathbf{T}_\Phi + \mu \mathbf{T}_\Phi = 0$  в подпространстве  $H_T$  тогда и только тогда, когда функция  $\Phi$  является решением задачи

$$\Delta \Phi + \mu \Phi = 0, \quad \Phi|_{r=r_1, r_2} = 0.$$

Разложить аналогичным образом  $\mathbf{v}^S$  оказалось невозможным ввиду доказанной в работе

**Теоремы 2.** Поле  $\mathbf{S}_\Psi$  является решением задачи  $\Delta \mathbf{S}_\Psi + \mu \mathbf{S}_\Psi = 0$  в подпространстве  $H_S$  тогда и только тогда, когда функция  $\Psi$  является решением задачи

$$\Delta \Psi + \mu \Psi = 0, \quad \Psi|_{r=r_1, r_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{r=r_1, r_2} = 0.$$

Задача для функции  $\Psi$  не имеет нетривиальных решений, поскольку четыре граничных условия нельзя выполнить для решений уравнения второго порядка. Поэтому для разложения полоидальной части скорости использовалось собственные поля более сложной спектральной задачи  $\text{rot} \Delta \mathbf{v}^S + \mu \text{rot} \mathbf{v}^S = 0$ , для которой были доказаны следующие теоремы.

**Теорема 3.** Поле  $\mathbf{S}_\Psi$  является решением задачи  $\text{rot} \Delta \mathbf{S}_\Psi + \mu \text{rot} \mathbf{S}_\Psi = 0$  в подпространстве  $H_S$  тогда и только тогда, когда функция  $\Psi$  является решением задачи

$$\Delta^2 \Psi + \mu \Delta \Psi = 0, \quad \Psi|_{r=r_1, r_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{r=r_1, r_2} = 0.$$

**Теорема 4.** Система собственных полей задачи  $\text{rot} \Delta \mathbf{S} + \mu \text{rot} \mathbf{S} = 0$  в подпространстве  $H_S$  ортогональна (относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ).

Далее, для упрощения записи формул используются одноиндексные обозначения в разложениях полей.

Разложения  $T = \sum_j \alpha_j(t) T_j$ ,  $\mathbf{v} = \sum_i \beta_i(t) \mathbf{v}_i$  подставлялись в первое

и второе уравнения системы (1), после чего первое уравнение скалярно домножалось на  $\text{rot} \mathbf{v}_k$ , второе – на  $T_s$ , и затем уравнения интегрировались по объему оболочки. Таким образом, применялась некоторая модификация классического метода Галеркина для получения системы уравнений на амплитуды базисных мод. Третье уравнение системы (1) обеспечивалось автоматически самим представлением поля скорости в виде суммы тороидального и полоидального полей. В результате была получена квадратично нелинейная динамическая система для амплитуд мод  $\alpha_s$  и  $\beta_j$  вида:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N A_i^k \frac{d\beta_i}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,M} B_{ij}^k \beta_i \beta_j - \sum_{i=0}^N A_i^k \beta_i \mu_i + \text{RaPr}^{-1} \sum_{j=0}^M D_j^k \alpha_i \beta_j, \quad k = 0 \dots N, \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,M} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=0}^N H_i^s \beta_i - \text{Pr}^{-1} \lambda_s \alpha_s, \quad s = 0 \dots M, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mu_i$  и  $\lambda_s$  – собственные значения мод. Здесь большими буквами обозначены интегралы от некоторых комбинаций базисных полей по объему оболочки.

Для получения простейшей модели лоренцевского типа в разложениях были оставлена одна полоидальная мода скорости  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{0,n,m}^S$  и две температурных моды:  $T_1 = T_{0,n,m}$ , которая структурно связана с  $\mathbf{v}_{0,n,m}^S$  и  $T_0 = T_{1,0,0}$ , которая дает среднее отклонение температуры от гиперболического профиля. Значение индекса  $k = 0$  обусловлено тем, что именно такие элементарные моды обеспечивают перенос вещества оболочки от внутренней границы к внешней. Тороидальные компоненты скорости не использовались, поскольку они не имеют радиальной составляющей и не обеспечивают конвекцию как таковую.

Система (2) в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} A_1^1 \frac{d\beta_1}{dt} &= B_{11}^1 \beta_1^2 + \text{RaPr}^{-1} D_1^1 \alpha_1 - A_1^1 \mu_1 \beta_1, \\ \frac{d\alpha_0}{dt} &= F_{11}^0 \beta_1 \alpha_1 - \text{Pr}^{-1} \lambda_0 \alpha_0, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= (F_{10}^1 \alpha_0 + F_{11}^1 \alpha_1) \beta_1 + H_1^1 \beta_1 - \text{Pr}^{-1} \lambda_1 \alpha_1 \end{aligned} \quad (3)$$

и она была рассчитана для  $n = 1, \dots, 15$  и  $m = 0, \dots, n$ .

С точки зрения задач геодинамики интерес представляет случай, когда сферический индекс (порядок)  $m \neq 0$ , поскольку в противном случае поле

скоростей аксиально симметрично и в соответствии с теоремами запрета не может генерировать магнитное поле. Поэтому далее рассматривался случай именно таких  $m$ , причем аналитически было показано, что коэффициенты системы не зависят от значения  $m$ ,  $B_{11}^1 = F_{11}^1 = 0$  и  $F_{11}^0 = -F_{10}^1$ .

Найдено критическое значение числа Релея в системе (3), т.е. условия возникновения конвекции:

$$\text{Ra}_{cr} = \frac{\lambda_1 \mu_1 A_1^1}{H_1^1 D_1^1}.$$

Видно, что это значение не связано с величиной числа Прандтля.

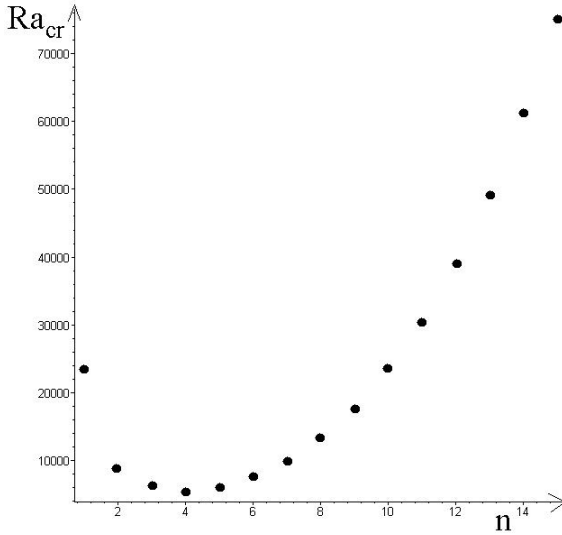


Рис. 1. Критическое число Релея для жидкого ядра Земли ( $r_1 = 0.664$ ,  $r_2 = 1.663$ ).

На рис 1. представлен график зависимости  $\text{Ra}_{cr}$  от сферического индекса (степени)  $n$  для радиусов слоя, соответствующих жидкому ядру Земли (за единицу длины принята толщина ядра). Из графика видно, что наименее устойчивыми к возбуждению являются сферические моды степени  $n = 4$  и они первыми должны возбуждаться при возникновении конвекции в ядре Земли.

Расчеты, проведенные для других радиусов показали, что при уменьшении относительной толщины слоя минимум  $\text{Ra}_{cr}$  сдвигается в сторону больших  $n$ , что соответствует известному положению о том, что в конвективных структурах вертикальные и горизонтальные масштабы ячеек должны быть примерно одинаковыми.

Масштабным преобразованием фазовых переменных и времени системе (3) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\beta}_1}{d\tilde{t}} &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} \text{Pr}(-\tilde{\beta}_1 + \tilde{\alpha}_1), \\ \frac{d\tilde{\alpha}_1}{d\tilde{t}} &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{cr}} \tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_0, \\ \frac{d\tilde{\alpha}_0}{d\tilde{t}} &= \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \tilde{\alpha}_0,\end{aligned}\tag{4}$$

почти совпадающая с системой Лоренца двумерной маломодовой конвекции в плоском слое [3]. Отличие от системы Лоренца состоит в наличии коэффициента  $\mu_1/\lambda_1$  в первом уравнении. Этот коэффициент, как и коэффициент  $\lambda_0/\lambda_1$ , является геометрической характеристикой и дает отношение вертикального и горизонтального размеров конвективной ячейки. В системе Лоренца масштабный коэффициент есть только в третьем уравнении. Это отличие можно объяснить тем, что в плоском слое соотношение размеров может быть любым и определяется одним числом. В сферической оболочке от полюса до полюса должно уложиться целое число ячеек, поэтому отношение размеров квантовано и определяется комбинацией степени сферической гармоники  $n$  и относительной толщиной слоя, т.е. двумя параметрами.

Сопоставляя систему (4) с системой Лоренца можно увидеть, что в полученной модели реализуются те же режимы, что и в модели Лоренца, но при смещенном значении числа Прандтля. В частности, что при превышении  $\text{Ra}$  критического уровня  $\text{Ra}_{cr}$  система (3) имеет неустойчивую нулевую точку покоя и две ненулевые симметричные точки покоя, устойчивость которых зависит от комбинации  $\text{Ra} > \text{Ra}_{cr}$  и  $\text{Pr}$ . Реализуются и хаотические режимы.

Далее в диссертации рассматривается вращающаяся оболочка и исследуется влияние вращения на возникновение конвекции.

В правую часть уравнения Навье-Стокса системы (1) добавляется кориолисов член  $-\tau \text{rot}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v})$  с новым управляющим параметром  $\tau = 2h^2\Omega/\nu$  – числом Кориолиса, где  $\Omega$  – угловая скорость вращения. Аналог динамической системы (2) для вращающегося слоя примет вид:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^N A_i^k \frac{d\beta_i}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,M} B_{ij}^k \beta_i \beta_j - \sum_{i=0}^N A_i^k \beta_i \mu_i + \text{RaPr}^{-1} \sum_{j=0}^M D_j^k \alpha_j \beta_j + \\ &+ \tau \sum_{i=0}^N E_i^k \beta_i, \quad k = 0 \dots N, \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,M} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=0}^N H_i^s \beta_i - \text{Pr}^{-1} \lambda_s \alpha_s, \quad s = 0 \dots M.\end{aligned}$$

Установлено, что если в данной системе оставить одну моду скорости, коэффициент  $E_i^j$  оказывается нулевым и из модели исчезает фактор вращения. Вычисление коэффициента  $E_i^j$  показало, что для включения в маломодовую модель типа (3) кориолисова слагаемого, необходимо ввести хотя бы одну тороидальную моду скорости. Этот математический результат физически объясним, поскольку именно тороидальные моды, не дающие радиального переноса, могут описать кориолисов снос.

С учетом того, что наименее устойчивыми к возбуждению при радиусах жидкого ядра Земли в невращающейся оболочке оказались моды степени  $n = 4$  рассматривался отбор тороидальной моды скорости по аппроксимации сноса  $\mathbf{v}_{0,4,m}^S$ . В качестве критерия аппроксимации использовалась минимизация невязки  $\sum_{l,n,m} (q_{l,n,m} \mathbf{v}_{l,n,m}^T - \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_{0,4,m}^S)$  в метрике скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ . Для учета вращения в маломодовую модель добавлялась тороидальная мода  $\mathbf{v}_0$ , дающая основной вклад в кориолисов снос конвективной моды скорости  $\mathbf{v}_1$ .

Таким образом, конвекция во вращающейся оболочке описывались системой:

$$\begin{aligned} A_0^0 \frac{d\beta_0}{dt} &= -A_0^0 \mu_0 \beta_0 - \tau E_1^0 \beta_1, \\ A_1^1 \frac{d\beta_1}{dt} &= \text{RaPr}^{-1} D_1^1 \alpha_1 - A_1^1 \mu_1 \beta_1 - \tau E_0^1 \beta_0, \\ \frac{d\alpha_0}{dt} &= F_{01}^0 \beta_1 \alpha_1 - \text{Pr}^{-1} \lambda_0 \alpha_0, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= F_{00}^1 \alpha_0 \beta_1 + H_1^1 \beta_1 - \text{Pr}^{-1} \lambda_1 \alpha_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Показано, что критическое значение числа Релея для системы (5) имеет вид:

$$\text{Ra}_{cr}^{rot} = \text{Ra}_{cr} + \tau^2 \frac{(E_1^0)^2 \lambda_1}{A_0^0 D_1^1 H_1^1 \mu_0}. \tag{6}$$

В полученном выражении первое слагаемое в правой части равно критическому значению числа Релея в невращающейся оболочке, а множитель после  $\tau^2$  оказывается положительным. Из этого следует, что вращение играет тормозящую роль в запуске конвекции. Кроме этого в пределе при  $\tau \rightarrow 0$  (исчезающе малое вращение)  $\text{Ra}_{cr}^{rot}$  переходит в  $\text{Ra}_{cr}$ .

Были проведены численные расчеты со следующими параметрами жидкого ядра Земли [1]:  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $h = 2.1 \cdot 10^6$  м,  $g_2 = 7$  м/с<sup>2</sup>,  $k = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-6}$  рад/с,  $\delta T = 10^3$  К и  $\beta = 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>.

Рассчитанные по формуле (6) критические значения числа Релея

имеют значения:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{cr}^{rot} &= 6.8 \cdot 10^{28} && \text{для } m=1, \\ \text{Ra}_{cr}^{rot} &= 7.4 \cdot 10^{28} && \text{для } m=2, \\ \text{Ra}_{cr}^{rot} &= 8.3 \cdot 10^{28} && \text{для } m=3, \\ \text{Ra}_{cr}^{rot} &= 3.1 \cdot 10^{28} && \text{для } m=4. \end{aligned}$$

Видно, что условия "запуска" конвективных структур, соответствующих различным порядкам  $m$  практически не отличаются.

Численно были найдены и исследованы на устойчивость по первому приближению ненулевые точки покоя системы (5). Все они оказались неустойчивыми при различных значениях значений  $\tau$ . Можно сделать вывод, что даже как угодно малое вращение разрушает строго стационарные конвективные режимы, которые могут существовать в невращающейся оболочке.

На основе результатов, описанных в первой главе можно сделать вывод – наименее устойчивыми к возбуждению в ядре Земли являются моды с индексом  $n=4$ , поэтому при малых надкритичностях именно они должны генерироваться в первую очередь. При этом, рассчитанное по вышеуказанным параметрам ядра число Релея  $\text{Ra} = 10^{29}$ . Это незначительно превосходит рассчитанные по модели критические значения. Таким образом, в ядре может сформироваться конвективная структура, соответствующая степени  $n$  основной моды равной четырем.

Во **второй главе** рассматривается маломодовая модель геодинamo, структура полоидального поля скоростей которой согласована с данными о распределении плотности в жидком ядре Земли. Добавление к уравнениям конвекции (1) уравнения индукции и ускорения силы Лоренца в правую часть уравнения Навье-Стокса дает систему геодинamo:

$$\begin{aligned} \text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}) &= \text{rot} \Delta \mathbf{v} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \text{rot} \left( \frac{T}{r_2} \mathbf{r} \right) - \tau \text{rot} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + \\ &+ \text{rot} (\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T - r_1 r_2 \frac{v_r}{r^2} &= \text{Pr}^{-1} \Delta T, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q^{-1} \text{Pr}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь новый управляющий параметр  $q = k/\nu_m$  – число Робертса, где  $\nu_m$  – магнитная вязкость.

Для магнитного поля использовались условия ограниченности в центре ядра и принятые в геодинamo вакуумные граничные условия, т.е. условия непрерывного перехода в потенциальное поле вне ядра. Эти условия

означают, что все пространство за пределами ядра считается непроводящим.

Магнитное поле в ядре раскладывалось подобно полю скорости по сферическим функциям на элементарные стационарные тороидальные и полоидальные моды:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \sum_{k,n,m} \gamma_{knm}^T(t) \mathbf{B}_{knm}^T(r, \theta, \varphi) + \sum_{k,n,m} \gamma_{knm}^S(t) \mathbf{B}_{knm}^S(r, \theta, \varphi), \\ \mathbf{B}_{knm}^T &= \text{rot} \left( Z_{knm}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r} \right), \\ \mathbf{B}_{knm}^S &= \text{rot rot} \left( Z_{knm}^S(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r} \right).\end{aligned}$$

Функции  $Z_{knm}^T(r)$  и  $Z_{knm}^S(r)$  выбирались так, чтобы магнитные моды являлись собственными полями спектральной задачи  $\text{rot} \Delta \mathbf{B} + \eta \text{rot} \mathbf{B} = 0$  с соответствующими граничными условиями. Были проведены расчеты базисных магнитных мод и их собственных значений. Эти системы частично ортогональны при несовпадении типов полей (тороидальных или полоидальных) или сферических индексов.

Для разложения полей скорости и температуры системы (7) использовались те же системы, что и для (1). Аналогично получению системы (2), для модели геодинамо была получена система:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^N A_i^k \frac{d\beta_i}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,M} B_{ij}^k \beta_i \beta_j - \sum_{i=0}^N A_i^k \beta_i \mu_i + \text{RaPr}^{-1} \sum_{j=0}^M C_j^k \alpha_j + \\ + \tau \sum_{i=0}^N E_i^k \beta_i &+ \sum_{i,j=0}^{N,L} L_{i,j}^k \gamma_i \gamma_j, \quad k = 0, \dots, N \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,M} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=0}^N H_i^s \beta_i - \text{Pr}^{-1} \lambda_s \alpha_s, \quad s = 0, \dots, M \\ \sum_{i=0}^K Q_i^l \frac{d\gamma_i}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{N,K} W_{ij}^l \beta_i \gamma_j - q^{-1} \text{Pr}^{-1} \sum_{i=0}^K Q_i^l \eta_i \gamma_i, \quad l = 0, \dots, K,\end{aligned}\tag{8}$$

где последняя группа уравнений получена из уравнения индукции подстановкой в него разложений скорости и магнитной индукции, последующего домножения его на  $\text{rot} \mathbf{B}_l$  и интегрированием по объему ядра.

Для отбора мод при построении маломодовой модели использовалась косвенная информация о структуре течений в жидком ядре. Такую информацию дают неоднородности для распределения плотности жидкого ядра. В работе [4] анализировались результаты ряда работ по splitting-функциям собственных колебаний Земли, в которых получены срезы распределения плотности на различных глубинах. Вариации плотности на глубине 3900 км, соответствующие splitting-функции жидкого ядра, приведенные в [4], представлены на рис. 2. Здесь прослеживается четкая 12-зонная

шахматная структура. Автором работы на основе этих данных была высказана гипотеза о соответствующей структуре конвекции, где в шести областях материал ядра "тонет", а в шести – "всплывает".

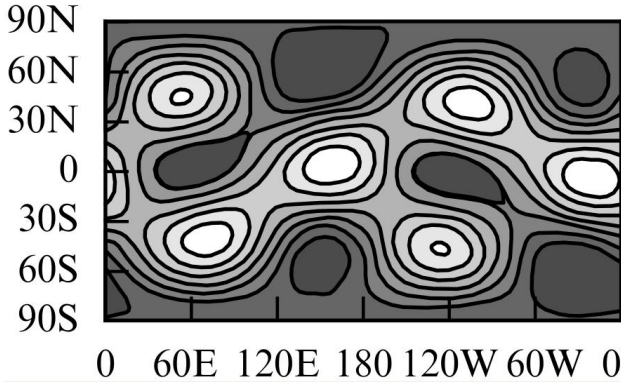


Рис. 2. Портрет splitting-функции для моды  $_{11}S_4$  собственных колебаний Земли из работы [4]. Черный цвет – плотность вещества на 0.2% выше средней, белый – плотность на 0.2% ниже средней. По горизонтальной оси отмечены градусы долготы, по вертикальной – широты.

Подобная же структура радиальных составляющих поля скорости имеется у полоидальной моды  $\mathbf{v}_{0,4,2}^S$ . Описанные в первой главе результаты теоретического анализа, показывают что крупномасштабная конвекция должна описываться полоидальными модами с индексом  $n=4$  и именно такое значение индекса дают наблюдения splitting-функций.

Таким образом, для представления 12-зонной конвекции была выбрана основная компонента скорости  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{0,4,2}^S$ . На рис. 3. слева при-

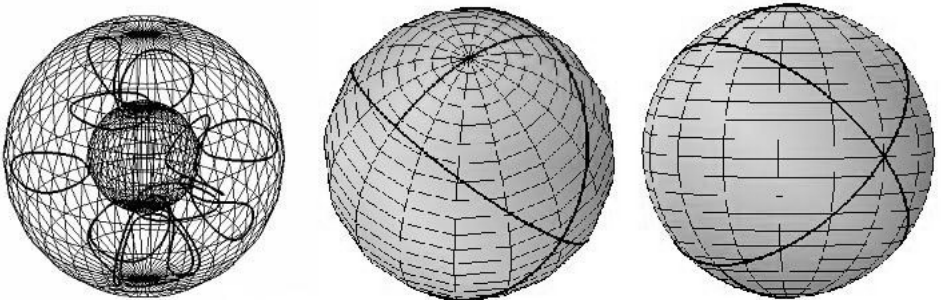


Рис. 3. Линии тока жидкости. Структура конвективных ячеек.



Таблица 1

№ т./п.	$\beta_1$	$\gamma_1$
1	$\pm 1.5 \cdot 10^2$	0
2	$\pm 2.5 \cdot 10^8$	$\pm (\mp) 6.9 \cdot 10^{11}$
3	$\pm 2.8 \cdot 10^7$	$\pm (\mp) 6 \cdot 10^{12}$

ведены некоторые линии тока для этой моды, справа – структура соответствующих конвективных ячеек. Всего ячеек 6. В центре каждой ячейки происходит подъем вещества, на периферии – опускание.

Аппроксимация кориолисова сноса основной моды скорости  $\mathbf{v}_1$  тороидальными модами в порядке убывания коэффициентов имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_{0,4,2}^S \approx & 0.41\mathbf{v}_{0,5,2}^T - 0.34\mathbf{v}_{1,3,2}^T - 0.25\mathbf{v}_{0,3,2}^T - 0.17\mathbf{v}_{1,5,2}^T - \\ & - 0.06\mathbf{v}_{2,5,2}^T + 0.04\mathbf{v}_{2,3,2}^T + \dots, \end{aligned}$$

поэтому в модели использовались две тороидальные компоненты:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{0,5,2}^T$  и  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1,3,2}^T$ .

Температура как и в случае построения аналога системы Лоренца представлялась компонентами  $T_0 = T_{1,0,0}$  и  $T_1 = T_{0,4,2}$ .

Отбор мод для представления магнитного поля основывался на обязательном включении дипольной составляющей поля, а также компонент пространственно (по индексам) связанных с компонентами скорости. При этом часть таких мод оказывалась затухающими в системе (8) и они отбрасывались. Окончательно магнитное поле было представлено вертикальным диполем  $\mathbf{B}_{0,1,0}^S$  и модами  $\mathbf{B}_{0,5,\pm 2}^S$ ,  $\mathbf{B}_{1,3,\pm 2}^S$ ,  $\mathbf{B}_{0,4,\pm 2}^T$ . Таким образом, в построенной модели можно говорить о поддержании только вертикального диполя.

Для полученной в результате 12-мерной динамической системы для амплитуд численно были найдены точки покоя при параметрах ядра, приведенных на стр. 12 и значении магнитной вязкости  $\nu_m = 1 \text{ м}^2/\text{с}$  [1]. Всего ненулевых точек покоя оказалось 10, причем они разделяются на 3 существенно различные группы, а в пределах каждой группы точки переходят друг в друга при симметриях модели.

Безразмерные координаты  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  этих точек, определяющих характерные амплитуды скорости и основного диполя, приведены в Таблице 1. С учетом симметрий первая точка таблицы расщепляется на две, а каждая из двух оставшихся – на четыре точки. Первая точка соответствует непроводящему материалу ядра, т.е. не представляет интереса для задачи геодинамо.

Пересчет безразмерной скорости в систему Си дает, что  $\beta_1 = 2.46 \cdot 10^8 \sim 10^{-4} \text{ м/с}$ ,  $\beta_1 = 2.77 \cdot 10^7 \sim 10^{-5} \text{ м/с}$ . Имеющиеся оценки реальной ха-

рактерной скорости конвекции дают значения порядка  $10^{-4}$  м/с [5]. Такая скорость соответствует второй группе точек.

Математическое описание магнитного поля вне Земли принято выполнять с помощью модели IGRF (International Geomagnetic Reference Field). В этой модели магнитное поле разлагается по мультиполям с нестационарными коэффициентами. Коэффициенты поля (гауссовские коэффициенты) пересчитываются каждые 5 лет на основе комплексной обработки данных всемирной сети магнитных обсерваторий. Коэффициент  $g_1^0$ , соответствующий вертикальному диполю незначительно колебался (в пределах 7% от среднего) около значения  $-3 \cdot 10^4$  нТл в течении времени 1900–2010 г.г.

Расчет модельного значения этого коэффициента, соответствующего одной из точек покоя № 2, т.е. величина  $g_1^0$  формируемая предложенной моделью, дал  $g_1^0 = -25 \cdot 10^4$  нТл. Таким образом, расхождение величины модельного диполя с данными наблюдений отличается менее чем на порядок.

Исследование всех точек покоя на устойчивость показало, что они неустойчивы по первому приближению. Поэтому одна из точек покоя второй группы может описывать имеющуюся в настоящее время устойчивую ситуацию, если только нелинейные эффекты тормозят экспоненциальный уход фазовых траекторий от этой неустойчивой точки.

Для того, чтобы это выяснить проводился расчет поведения фазовых траекторий в окрестности точки № 2. На рис.4. представлены проекции двух фазовых траекторий на подпространство амплитуд  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , стартовых из окрестности точки № 2, построенных на промежутке 20 тыс. лет с шагом два года (на осях отложены безразмерные значения амплитуды). На рис.5. приведено изменение во времени двух амплитуд диполя и скорости за 100 тыс. лет. Горизонтальной линией с подписью s.p.№ 2 отмечен уровень, соответствующий точке покоя. Расчеты были проведены для промежутка времени пол миллиона лет и колебания подобной структуры сохранялись.

Расчеты фазовых траекторий в окрестностях других точек не выявили подобных устойчивых режимов.

Таким образом, результаты расчетов свидетельствуют о наличии в окрестности точки № 2 предельного цикла, соответствующего квазистационарному режиму геодинamo, согласующегося с наблюдениями.

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

1. Разработана маломодовая модель, отражающая эмпирические данные о распределении плотности в жидком ядре Земли, получаемые с помощью анализа структуры собственных колебаний. Модель включает 3 компоненты скорости, 2 компоненты температуры, 7 магнит-

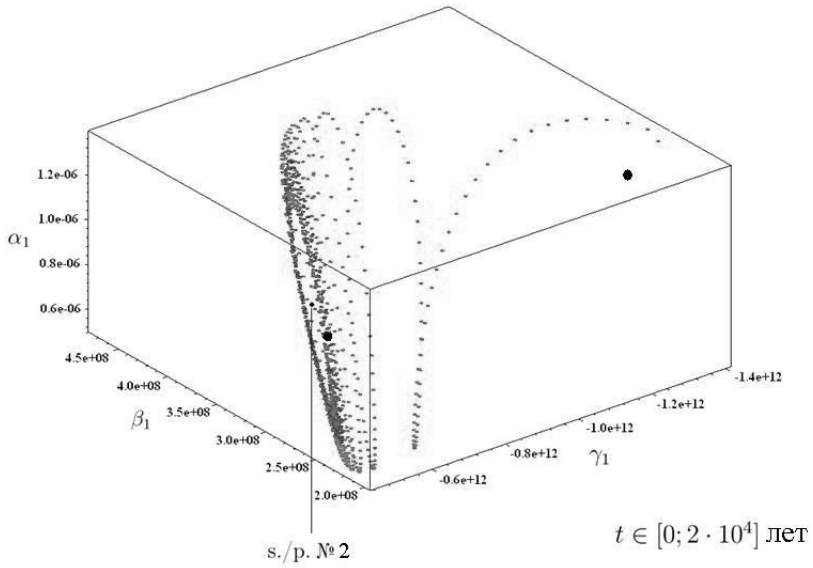


Рис. 4. Фазовые траектории: 3D-проекции.

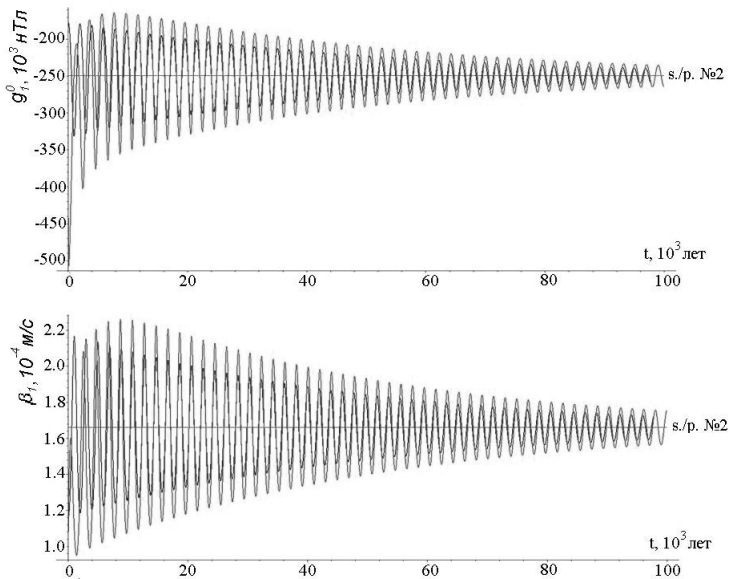


Рис. 5. Модельная динамика скорости и диполя.

ных компонент. Одна из магнитных компонент моделирует вертикальный диполь, остальные поддерживают вертикальный диполь, взаимодействуя с компонентами скорости.

2. С помощью вычислительных экспериментов по расчету некоторых фазовых траекторий, показано существование в рамках модели устойчивого на характерных временах порядка сотен тысяч лет квазистационарного режима, в котором величина дипольной компоненты геомагнитного поля близка к наблюдаемой, а характерные скорости течений совпадают по порядку величин с имеющимися оценками.
3. Получен сферический аналог классической модели Лоренца конвекции в плоском слое. Существенное отличие этого аналога в том, что геометрическая структура конвективной ячейки определяется двумя масштабными параметрами, что является следствием периодичности на сфере. Модель обобщена на случай вращающейся оболочки. С использованием данной модели впервые теоретически объяснена 12-зонная шахматная структура в наблюдаемом распределении плотности.
4. Впервые получено решение спектральной задачи  $\text{rot } \Delta \mathbf{S} + \mu \text{rot} \mathbf{S} = 0$  в сферической оболочке в классе полоидальных полей нулевых на границе, доказана ортогональность системы ее собственных полей. Разработаны программы с помощью которых рассчитаны базисные системы полей для разложения температуры, скорости и магнитной индукции.

### **Список публикаций по теме диссертации**

1. Крутьева Л.К. Маломодовая модель геодинамо / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 2. С. 35-44.
2. Крутьева Л.К. Модель маломодовой конвекции в сферической оболочке / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // Естественные и технические науки. 2010. № 4(48). – С. 349-352.
3. Крутьева Л.К. Модель генерации геомагнитного поля системой объемных токов / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // Проблемы синергетики и коэволюции геосфер: Материалы Всероссийского научного симпозиума. Саратов: Изд - во Саратов. ин-та РГТЭУ. 2008. С. 127-129.
4. Крутьева Л.К. Магнитные поля, генерируемые объемными токами в шаровой области // Материалы VI региональной молодежной научной конференции «Исследования в области наук о Земле» (геогра-

фия, геология, геофизика, геоэкология, вулканология). г. Петропавловск Камчатский: КамГУ им. В.Беринга. 2008. С. 36-38.

5. Крутьева Л.К. Численная модель геомагнитного поля, согласованная с 12-ячейковой структурой конвекции в жидком ядре // Десятая уральская молодежная научная школа по геофизике: Сборник науч. материалов. – Пермь: Горный институт УрО РАН, 2009. С. 124-129.
6. Крутьева Л.К. Базисные системы для геомагнитного поля / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(1). С. 24-30.
7. Крутьева Л.К. Модель конвекции во вращающихся сферических слоях при малых надкритичностях / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // Сборник докладов V международной конференции «Солнечно-земные связи и предвестники землетрясений», п. Паратунка, Елизовский район. Камчатский край. 2010. С. 131-134.
8. Крутьева Л.К. Маломодовая модель геодинамо. / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // Сборник докладов V международной конференции «Солнечно-земные связи и предвестники землетрясений», п. Паратунка, Елизовский район. Камчатский край. 2010. С. 102-105.
9. Крутьева Л.К. Маломодовая модель геодинамо, возбуждаемого 6-ячейковой конвекцией. / Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. // XI Уральская молодежная научная школа по геофизике: Сборник науч. материалов. – Екатеринбург: Институт геофизики УрО РАН, 2010. С. 131-134.
10. Крутьева Л.К. Модель геодинамо, согласующаяся с данными о крупномасштабной структуре конвекции в ядре Земли. // Материалы XI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. 26-29 октября 2010 г., г. Красноярск. Институт вычислительных технологий СО РАН. [электронный ресурс] URL <http://conf.nsc.ru/reportview/29235>.
11. Фещенко Л.К. Об ортогональности решений одной спектральной задачи в классе полоидальных полей / Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(2). С. 25-30.
12. Крутьева Л.К. Программа для ЭВМ «GeoMag» (визуализация компонент референтного геомагнитного поля), №гос. рег. 50200801952, 2008.

13. Фещенко Л.К. Библиотека программ для расчета собственных значений и собственных функций некоторых спектральных задач в магнитогидродинамических сферических оболочках «SphericalEigenFields», / Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. // №гос. рег. 50201100091, 2011.
14. Фещенко Л.К. Библиотека программ для исследования «Маломодовой модели геодинамо» «LowModedGeodynamoModel», / Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. // №гос. рег. 50201100092, 2011.

## Список литературы

- [1] KONO M., ROBERTS P.H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Rev. of Geophysics. 2002. V. 40. № 10. P. B1-B41.
- [2] JONES C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond., A. 2000. V. 358, P. 873-897.
- [3] ЗАСЛАВСКИЙ Г.М., САГДЕЕВ Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
- [4] КУЗНЕЦОВ В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // УФН. 1997. Т. 169. № 9. С. 1001-1012.
- [5] ГОЛИЦЫН Г.С. Режимы конвекции на различных вращающихся геофизических и астрофизических объектах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 1. С. 20-31.

Фещенко Любовь Константиновна

**МАЛОМОДОВАЯ МОДЕЛЬ ГЕОДИНАМО**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

---

Подписано в печать ?? .2011.  
Заказ № . Тираж 100 экз.

---

Издательство