

Автоматизированная генерация каскадных моделей турбулентности методами компьютерной алгебры

Г. М. Водинчар, Л. К. ФЕЩЕНКО*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Паратунка, Россия

*Контактный автор: Фещенко Любовь Константиновна, e-mail: Feschenko.lk@yandex.ru

Поступила 20 апреля 2021 г., доработана 22 июля 2021 г., принята в печать 30 июля 2021 г.

Описана разработанная методика генерации уравнений каскадных моделей турбулентности с помощью систем компьютерной алгебры. Методика позволяет варьировать размер масштабной нелокальности модели, вид квадратичных законов сохранения и спектральных законов, знаменатель геометрической прогрессии масштабов. Ее использование позволяет быстро и безошибочно генерировать целые классы моделей. Может использоваться для разработки каскадных моделей гидродинамических, магнитогидродинамических и конвективных турбулентных систем.

Ключевые слова: турбулентность, каскадные модели, компьютерная алгебра, автоматизация разработки моделей.

Цитирование: Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Автоматизированная генерация каскадных моделей турбулентности методами компьютерной алгебры. Вычислительные технологии. 2021; 26(5):65–80. DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.006.

Введение

Основная идея каскадных моделей турбулентности состоит в построении цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы распределения энергии по масштабному спектру в развитой турбулентности. Известные каскадные модели хорошо воспроизводят реалистичные распределения пространственных спектров полей [1–5].

Схема построения каскадных моделей заключается в следующем. Ось волновых чисел разбивается на расширяющиеся в геометрической прогрессии зоны (оболочки). Возникает последовательность волновых чисел $k_n = q^n k_0$, где при подходящем выборе пространственного масштаба $k_0 = 1$. Знаменатель прогрессии q можно выбирать достаточно произвольным больше единицы, чаще всего в вычислительной практике берут $q = 2$. Отметим в то же время, что есть определенные физические соображения в пользу применения в качестве q константы золотого сечения $(1 + \sqrt{5})/2$ [3, 6].

Динамика каждого поля X турбулентной системы описывается переменными $X_n(t)$, так называемыми коллективными переменными, абсолютные значения которых интерпретируются как меры пульсаций поля X в диапазонах масштабов с волновыми числами из $[k_n; k_{n+1})$. Для этих переменных составляется система уравнений, качественно подобная исходным уравнениям турбулентной системы. Поскольку уравнения гидродинамики и магнитной гидродинамики являются квадратично-нелинейными, речь идет о

квадратично-нелинейной динамической системе. Коэффициенты при нелинейных членах такой системы определяют в модели перенос энергии вдоль инерционного интервала масштабов в развитой турбулентности. При построении каскадных моделей используются как комплексные, так и вещественные коллективные переменные. В этой статье рассматриваются только вещественные.

Известно, что в бездиссипативном пределе в уравнениях гидродинамики и магнитной гидродинамики существуют сохраняющиеся квадратичные величины. Поэтому необходимо, чтобы и уравнения каскадных моделей обладали квадратичными инвариантами, являющимися аналогами этих величин. Собственно, основная математическая задача при выводе уравнений каскадных моделей заключается в расчете коэффициентов при нелинейных членах, которые обеспечивали бы существование тех или иных квадратичных инвариантов.

В настоящей работе описана разработанная технология автоматизированного построения каскадных моделей, в которой расчет коэффициентов нелинейных взаимодействий реализуется с помощью систем символьных вычислений (систем компьютерной алгебры, Computer Algebra Systems — CAS) [7–9]. Отметим, что символьные пакеты используются не для исследования готовых каскадных моделей, а именно для автоматизированной генерации уравнений самих этих моделей. Ранее авторы настоящей работы рассматривали применение CAS для автоматизированного составления спектральных моделей геофизической гидродинамики [10, 11].

Будем рассматривать автоматизированную генерацию каскадных моделей гидродинамики, конвекции, магнитной гидродинамики и магнитогидродинамической конвекции. Пусть U_n , Θ_n и B_n — коллективные переменные для полей скорости, температуры и магнитной индукции соответственно.

В наиболее общем виде рассматриваемые каскадные модели могут быть записаны в следующем виде.

Гидродинамическая турбулентность:

$$\frac{dU_n}{dt} = \sum_{i,j} S_{nij} U_i U_j - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + f_n(t), \quad (1)$$

где Re — число Рейнольдса; $f_n(t)$ — заданные функции, моделирующие подвод энергии в турбулентную систему извне. Обычно этот подвод выполняется только на основном масштабе системы (макромасштабе) $n = 0$.

Турбулентная конвекция:

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= \sum_{i,j} S_{nij} U_i U_j - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + \Theta_n, \\ \frac{d\Theta_n}{dt} &= \sum_{i,j} H_{nij} U_i \Theta_j - k_n^2 (\text{Pr Re})^{-1} \Theta_n + f_n(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где Pr — число Прандтля. Здесь внешний подвод энергии $f_n(t)$ осуществляется через температуру (тепловой источник), а в уравнении для скорости температурный член соответствует силе Архимеда. Поскольку архимедов член в уравнениях конвекции является линейным, то ясно, что пространственные масштабы температурных неоднородностей и вызываемых ими неоднородностей скорости должны совпадать, поэтому на пульсации скорости n -й масштабной оболочки должны влиять только пульсации температуры из этой же оболочки.

Магнитогидродинамическая (МГД) турбулентность:

$$\begin{aligned}\frac{dU_n}{dt} &= \sum_{i,j} S_{nij} U_i U_j + \sum_{ij} L_{nij} B_i B_j - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + f_n(t), \\ \frac{dB_n}{dt} &= \sum_{i,j} W_{nij} U_i B_j - \text{Re}_m^{-1} k_n^2 B_n,\end{aligned}\quad (3)$$

где Re_m — магнитное число Рейнольдса.

Магнитогидродинамическая турбулентная конвекция:

$$\begin{aligned}\frac{dU_n}{dt} &= \sum_{i,j} S_{nij} U_i U_j + \sum_{ij} L_{nij} B_i B_j - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + \Theta_n, \\ \frac{d\Theta_n}{dt} &= \sum_{i,j} H_{nij} U_i \Theta_j - k_n^2 (\text{Pr Re})^{-1} \Theta_n + f_n(t), \\ \frac{dB_n}{dt} &= \sum_{i,j} W_{nij} U_i B_j - \text{Re}_m^{-1} k_n^2 B_n.\end{aligned}\quad (4)$$

Индексы n , i и j в уравнениях могут принимать любые целочисленные значения. Каскадные модели различаются коэффициентами нелинейных взаимодействий S_{nij} , H_{nij} , S_{nij} , L_{nij} , W_{nij} , обеспечивающими существование различных квадратичных инвариантов.

1. Законы сохранения в каскадных моделях

В бездиссипативном пределе, т. е. когда $\text{Re} = \text{Pr} = \text{Re}_m = \infty$, и при отсутствии внешних сил уравнения гидродинамики и магнитогидродинамики удовлетворяют некоторому набору законов сохранения. Эти законы сохранения различаются в случае “чистой” гидродинамики и в случае магнитной гидродинамики, а также зависят от размерности физического пространства, в котором рассматривается турбулентная система [3]. Сохраняющиеся величины являются некоторыми квадратичными формами от турбулентных полей. Поэтому требуется, чтобы и каскадные модели при отсутствии диссипации и внешнего подвода энергии также обладали некоторыми квадратичными инвариантами от коллективных переменных. Эти квадратичные формы должны быть формальными аналогами точных сохраняющихся величин.

Важно отметить, что сама идея каскадных моделей предполагает отказ от описания геометрической структуры движений. В то же время хорошо известно [2], что турбулентные процессы в пространствах двух и трех измерений ведут себя по-разному. Поэтому обеспечение тех или иных комбинаций сохраняющихся величин дает возможность косвенно вносить в каскадную модель информацию о размерности физического пространства, в котором развивается турбулентный процесс.

Каскадные аналоги законов сохранения приведены в табл. 1. Ясно, что для закона сохранения кинетической энергии очевидным и безальтернативным будет инвариант $\sum_n U_n^2$. Также очевидны и аналоги энстрофии, полной энергии, энергии пульсаций температуры, квадрата векторного потенциала и перекрестной спиральности, где множитель $k_n = q^n$ является аналогом оператора набла в пространстве волновых чисел.

С каскадными аналогами гидродинамической и магнитной спиральности ситуация сложнее. На первый взгляд формальным аналогом гидродинамической спиральности

Т а б л и ц а 1. Квадратичные инварианты
Table 1. Quadratic invariants

Двумерные течения	Трехмерные течения
Инварианты в “чистой” гидродинамике	
Энстрофия $\Omega = \int (\text{rot}\mathbf{v})^2 dV \sim \sum_n (q^n U_n)^2.$	Спиральность гидродинамическая $H_V = \int \mathbf{v} \cdot \text{rot}\mathbf{v} dV \sim \sum_n \alpha_n U_n (q^n U_n).$
Кинетическая энергия $E_V = \int \mathbf{v}^2 dV \sim \sum_n U_n^2$	Кинетическая энергия $E_V = \int \mathbf{v}^2 dV \sim \sum_n U_n^2$
Инварианты в магнитной гидродинамике	
Полная энергия $E = \int (\mathbf{v}^2 + \mathbf{B}^2) dV \sim \sum_n (U_n^2 + B_n^2).$	Полная энергия $E = \int (\mathbf{v}^2 + \mathbf{B}^2) dV \sim \sum_n (U_n^2 + B_n^2).$
Квадрат векторного потенциала $A = \int \mathbf{a}^2 dV \sim \sum_n (q^{-n} B_n)^2.$	Спиральность магнитная $H_B = \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) dV \sim \sum_n \beta_n (q^{-n} B_n) B_n.$
Спиральность перекрестная $H_C = \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) dV \sim \sum_n U_n B_n$	Спиральность перекрестная $H_C = \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) dV \sim \sum_n U_n B_n$
Температурный инвариант	
Энергия температурных пульсаций $E_T = \int T^2 dV \sim \sum_n \Theta_n^2$	Энергия температурных пульсаций $E_T = \int T^2 dV \sim \sum_n \Theta_n^2$

будет $\sum_n U_n (q^n U_n)$, однако это выражение знакоположительное, а реальная спиральность может быть любого знака. Поэтому вводятся коэффициенты α_n , которые могут обеспечить знакопеременность формы. Поскольку все слагаемые должны быть равноправны, будем считать, что $|\alpha_n| = 1$. По аналогичным причинам вводятся и множители β_n в каскадный аналог магнитной спиральности, причем также $|\beta_n| = 1$. Далее мы уточним значения этих коэффициентов.

Инвариантность во времени каждой из приведенных в табл. 1 квадратичных форм от коллективных переменных означает, что их производные по времени тождественно нулевые, а любая такая производная будет суммой по всем масштабам от произведений как переменных, так и их производных.

Подставив в эти выражения значения производных из общих уравнений соответствующих каскадных моделей, получим кубичные формы от коллективных переменных, а коэффициенты этих кубичных форм будут линейными комбинациями коэффициентов нелинейных взаимодействий. Поскольку тождественное равенство нулю кубичных форм возможно только при всех нулевых коэффициентах этих форм, получим набор однородных линейных уравнений для искоемых коэффициентов нелинейных взаимодействий.

Формально этих уравнений, как и самих искоемых коэффициентов, бесконечно много, однако всегда вводятся ограничения на дальность взаимодействий в пространстве масштабов. Это приводит к конечному усечению как числа ненулевых коэффициентов взаимодействий, так и числа уравнений для них, поскольку остальные уравнения

выродятся в тождества. Конкретный вид уравнений зависит от используемых законов сохранения, от того, какая система рассматривается: гидродинамическая, магнитогидродинамическая, с учетом конвекции или без. Далее мы получим общий вид уравнений для коэффициентов взаимодействий в каждой конкретной ситуации, а также предлагаемую нами общую технологию составления и решения конечных усечений систем с помощью CAS.

В квадратичных членах, присутствующих в общих записях каскадных моделей (1)–(4), коэффициенты этих форм определяются тремя индексами, первый из которых соответствует номеру уравнения, т. е. номеру выделенной масштабной оболочки, а два других — номерам оболочек, взаимодействующих с выделенной, т. е. имеется некоторая неоднородность в пространстве масштабов. Однако в реальности для нелинейного переноса энергии в пределах инерционного интервала существует масштабная однородность. В таком случае взаимодействие i -й и j -й оболочек с n -й должно зависеть не от самих i и j , а только от расстояния от них до n -й оболочки в пространстве масштабов. Кроме того, все нелинейные члены точных уравнений гидродинамики, магнитогидродинамики и конвекции содержат оператор набла. Аналогом этого оператора в n -й масштабной оболочке выступает волновое число $k_n = q^n$. Поэтому нелинейные члены для общего вида (1)–(4) каскадных моделей обычно записывают другим способом:

$$\begin{aligned} S_{nij}U_iU_j &= q^n s_{i'j'}U_{n+i'}U_{n+j'}, \\ H_{nij}U_i\Theta_j &= q^n h_{i'j'}U_{n+i'}\Theta_{n+j'}, \\ L_{nij}B_iB_j &= q^n l_{i'j'}B_{n+i'}B_{n+j'}, \\ W_{nij}U_iB_j &= q^n w_{i'j'}U_{n+i'}B_{n+j'}, \\ i' &= i - n, \quad j' = j - n. \end{aligned} \tag{5}$$

Левый вариант записей оказывается удобнее для получения уравнений на коэффициенты, которые обеспечивают выполнение законов сохранения, поэтому мы и взяли его как исходный. Правый же вариант записи соответствует представлению о масштабной однородности в пределах инерционного интервала и качественно отражает дифференциальную структуру нелинейных членов гидродинамических уравнений. В дальнейшем будем использовать оба варианта, переходя при необходимости от одного к другому. Отметим также, что матрицы коэффициентов $s_{i'j'}$ и $l_{i'j'}$ естественно считать симметричными.

2. Система ограничений на коэффициенты нелинейных взаимодействий

В табл. 2 представлены полученные нами уравнения на коэффициенты матриц нелинейных взаимодействий, сгруппированные по различным типам моделей, в случае представления нелинейных членов правыми частями формул (5).

Рассмотрим подробно вывод этих уравнений на примере модели для трехмерного МГД-потока (3). Эквивалентная форма записи модели, основанная на правых частях (5), будет следующей:

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= q^n \sum_{i',j'} s_{i'j'} U_{n+i'} U_{n+j'} + q^n \sum_{i',j'} l_{i'j'} B_{n+i'} B_{n+j'} - \text{Re}^{-1} q^{2n} U_n + f_n, \\ \frac{dB_n}{dt} &= q^n \sum_{i',j'} w_{i'j'} U_{n+i'} B_{n+i'} - \text{Re}_m^{-1} q^{2n} B_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Т а б л и ц а 2. Уравнения для коэффициентов нелинейных взаимодействий
 Table 2. Equations for the coefficients of nonlinear interactions

Двумерные потоки	
Гидродинамика	
Сохранение кинетической энергии:	
$(s_{i,j} + s_{j,i}) + q^i (s_{-i,j-i} + s_{j-i,-i}) + q^j (s_{i-j,-j} + s_{-j,i-j}) = 0.$	
Сохранение энтропии:	
$(s_{i,j} + s_{j,i}) + q^{3i} (s_{-i,j-i} + s_{j-i,-i}) + q^{3j} (s_{i-j,-j} + s_{-j,i-j}) = 0.$	
Симметрии:	
$s_{ij} - s_{ji} = 0$	
Магнитная гидродинамика	
Сохранение полной энергии:	
$(s_{i,j} + s_{j,i}) + q^i (s_{-i,j-i} + s_{j-i,-i}) + q^j (s_{i-j,-j} + s_{-j,i-j}) = 0,$	
$l_{i,j} + l_{j,i} + q^j w_{-j,i-j} + q^i w_{-i,j-i} = 0.$	
Сохранение перекрестной спиральности:	
$(l_{i,j} + l_{j,i}) + q^i (l_{-i,j-i} + l_{j-i,-i}) + q^j (l_{i-j,-j} + l_{-j,i-j}) = 0,$	
$w_{i,j} + q^i w_{-i,j-i} + q^j s_{i-j,-j} + q^j s_{-j,i-j} = 0.$	
Сохранение квадрата векторного потенциала:	
$w_{i,j} + q^{-j} w_{i-j,-j} = 0.$	
Симметрии:	
$s_{ij} - s_{ji} = 0, \quad l_{ij} - l_{ji} = 0$	
Трёхмерные потоки	
Гидродинамика	
Сохранение кинетической энергии:	
$(s_{i,j} + s_{j,i}) + q^i (s_{-i,j-i} + s_{j-i,-i}) + q^j (s_{i-j,-j} + s_{-j,i-j}) = 0.$	
Сохранение гидродинамической спиральности:	
$(s_{i,j} + s_{j,i}) + (-1)^i q^{2i} (s_{-i,j-i} + s_{j-i,-i}) + (-1)^j q^{2j} (s_{i-j,-j} + s_{-j,i-j}) = 0.$	
Симметрии:	
$s_{ij} - s_{ji} = 0$	
Магнитная гидродинамика	
Сохранение полной энергии:	
$(s_{i,j} + s_{j,i}) + q^i (s_{-i,j-i} + s_{j-i,-i}) + q^j (s_{i-j,-j} + s_{-j,i-j}) = 0,$	
$l_{i,j} + l_{j,i} + q^j w_{-j,i-j} + q^i w_{-i,j-i} = 0.$	
Сохранение перекрестной спиральности:	
$(l_{i,j} + l_{j,i}) + q^i (l_{-i,j-i} + l_{j-i,-i}) + q^j (l_{i-j,-j} + l_{-j,i-j}) = 0,$	
$w_{i,j} + q^i w_{-i,j-i} + q^j s_{i-j,-j} + q^j s_{-j,i-j} = 0.$	
Сохранение магнитной спиральности:	
$w_{i,j} + (-1)^j w_{i-j,-j} = 0.$	
Симметрии:	
$s_{ij} - s_{ji} = 0, \quad l_{ij} - l_{ji} = 0$	
Конвективные потоки	
(дополнительное условие для температуры)	
Сохранение энергии пульсаций температуры:	
$h_{i,j} + q^j h_{i-j,-j} = 0$	

В модели трехмерного МГД-потока при $Re = Re_m = \infty$ (отсутствие диссипации) и $f_n = 0$ (отсутствие внешнего подвода энергии) должны быть три квадратичных инварианта (см. табл. 1). Это каскадные аналоги для полной энергии $E = \sum_n (U_n^2 + B_n^2)$,

перекрестной $H_C = \sum_n U_n B_n$ и магнитной $H_B = \sum_n \beta_n q^{-n} B_n^2$ спиральности. Тогда для изменения полной энергии получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_n (U_n^2 + B_n^2) = 2 \sum_n \left(U_n \frac{dU_n}{dt} + B_n \frac{dB_n}{dt} \right) = \\ &= 2 \sum_{n,i,j} (S_{nij} U_i U_j U_n + L_{nij} B_i B_j U_n + W_{nij} U_i B_j B_n) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Следует обеспечить равенство нулю суммы двух кубических форм — одной с коэффициентами S_{nij} , другой с коэффициентами L_{nij} и W_{nij} . Для этого необходимо и достаточно равенство нулю всех коэффициентов, однако надо учесть подобные слагаемые.

В последнем выражении (7) в форме с коэффициентами S_{nij} возникают подобные слагаемые, соответствующие всем перестановкам индексов i, j и n , поэтому получим условие

$$S_{nij} + S_{nji} + S_{inj} + S_{ijn} + S_{jin} + S_{jni} = 0.$$

На этом этапе целесообразно перейти к двухиндексному варианту записи в соответствии с формулами (5):

$$q^n s_{i-n,j-n} + q^n s_{j-n,i-n} + q^i s_{n-i,j-i} + q^i s_{j-i,n-i} + q^j s_{i-j,n-j} + q^j s_{n-j,i-j} = 0.$$

Поделив почленно на q^n и перейдя к штрихованным индексам по схеме $i' = i - n$, $j' = j - n$, получаем

$$(s_{i',j'} + s_{j',i'}) + q^{i'} (s_{-i',j'-i'} + s_{j'-i',-i'}) + q^{j'} (s_{i'-j',-j'} + s_{-j',i'-j'}) = 0. \quad (8)$$

Далее в последнем выражении (7) в форме с коэффициентами L_{nij} и W_{nij} подобны слагаемые, соответствующие перестановкам индексов i и n , а затем перестановкам индексов магнитных коллективных переменных. Поэтому получается уравнение

$$L_{nij} + L_{nji} + W_{jni} + W_{inj} = 0.$$

Переходя к двухиндексному варианту записи, запишем

$$q^n l_{i-n,j-n} + q^n l_{j-n,i-n} + q^j w_{n-j,i-j} + q^i w_{n-i,j-i} = 0.$$

Поделив почленно на q^n и перейдя к штрихованным индексам, получаем

$$(l_{i',j'} + l_{j',i'}) + q^{j'} w_{-j',i'-j'} + q^{i'} w_{-i',j'-i'} = 0. \quad (9)$$

Итак, условие сохранения полной энергии дает два семейства уравнений (8), (9), которые приведены в табл. 2 с индексами без штрихов.

Для изменения перекрестной спиральности получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dH_C}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_n U_n B_n = \sum_n \left(U_n \frac{dB_n}{dt} + B_n \frac{dU_n}{dt} \right) = \\ &= \sum_{n,i,j} (W_{nij} U_i B_j U_n + S_{nij} U_i U_j B_n + L_{nij} B_i B_j B_n) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В последнем выражении (10) в форме с коэффициентами L_{nij} возникают подобные слагаемые, соответствующие всем перестановкам индексов i, j и n . Такая ситуация уже

возникла выше в уравнении для изменения полной энергии с коэффициентами S_{nij} , поэтому сразу можно написать уравнение, аналогичное уравнению (8):

$$(l'_{i',j'} + l_{j',i'}) + q^{i'} (l_{-i',j'-i'} + l_{j'-i',-i'}) + q^{j'} (l_{i'-j',-j'} + l_{-j',i'-j'}) = 0. \quad (11)$$

Видно, что в (10) в каждой из сумм с коэффициентами S_{nij} и W_{nij} подобны слагаемые, соответствующие перестановкам индексов j и n , а затем перестановкам индексов коллективных переменных поля скорости. Следовательно, получается уравнение

$$W_{nij} + W_{inj} + S_{jin} + S_{jni} = 0.$$

В двухиндексном варианте записи это уравнение примет вид

$$q^n w_{i-n,j-n} + q^i w_{n-i,j-i} + q^j s_{i-j,n-j} + q^j s_{n-j,i-j} = 0,$$

а после сокращения на q^n и перехода к штрихованным индексам

$$w_{i',j'} + q^{i'} w_{-i',j'-i'} + q^{j'} s_{i'-j',-j'} + q^{j'} s_{-j',i'-j'} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, условие сохранения перекрестной спиральности энергии дает два семейства уравнений (11), (12), которые приведены в табл. 2 с индексами без штрихов.

Осталось получить ограничения на коэффициенты из условия сохранения магнитной спиральности. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{dH_B}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_n \beta_n q^{-n} B_n^2 = 2 \sum_n \beta_n q^{-n} B_n \frac{dB_n}{dt} = 2 \sum_{n,i,j} \beta_n q^{-n} W_{nij} U_i B_j B_n = 0. \quad (13)$$

В последнем выражении (13) кубичная форма содержит подобные слагаемые, соответствующие перестановкам индексов j и n , поэтому

$$q^{-n} \beta_n W_{nij} + q^{-j} \beta_j W_{jin} = 0.$$

Переходим к двухиндексному варианту записи

$$q^{-n} \beta_n q^n w_{i-n,j-n} + q^{-j} \beta_j q^i w_{i-j,n-j} = 0,$$

а затем почленно делим на β_n и используем штрихованные индексы

$$w_{i',j'} + \frac{\beta_{j'+n}}{\beta_n} w_{i'-j',-j'} = 0. \quad (14)$$

Здесь необходимо отметить, что ранее полученные уравнения (8), (9), (11), (12) не содержат индекса n . В них присутствуют только индексы, определяющие расстояния до выделенной n -й оболочки. В этом проявляется масштабная однородность турбулентности. Однако в уравнении (14) этот индекс есть, что является следствием искусственного введения коэффициентов β_n в формулу каскадного аналога магнитной спиральности для обеспечения ее знакопеременности. Поэтому для сохранения масштабной однородности необходимо потребовать, чтобы отношение $\beta_{j'+n}/\beta_n$ зависело только от j' . Это возможно в том и только в том случае, когда последовательность β_n является геометрической прогрессией. Поскольку ранее упоминалось, что мы накладываем условие

$|\beta_n| = 1$ для обеспечения равноправия всех слагаемых в выражении магнитной спиральности, знаменатель прогрессии необходимо положить равным ± 1 . Наконец, последовательность β_n должна быть знакопеременной. Учитывая все эти соображения, приходим к единственной возможности, что $\beta_n = (-1)^n$.

Тогда условие сохранения магнитной спиральности

$$w_{i',j'} + (-1)^{j'} w_{i-j,-j} = 0 \quad (15)$$

дает уравнения, которые приведены в табл. 2 с опущенными штрихами при индексах.

Также дополнительно вводим естественные условия симметрии матриц:

$$l_{ij} - l_{ji} = 0, \quad s_{ij} - s_{ji} = 0. \quad (16)$$

Итак, коэффициенты матриц нелинейных взаимодействий каскадной модели трехмерного магнитогидродинамического потока в форме (6) должны удовлетворять линейной однородной системе, образованной бесконечными семействами уравнений (8), (9), (11), (12), (15), (16).

С помощью аналогичных рассуждений и преобразований можно получить и все остальные уравнения, приведенные в табл. 2. Отметим, что требования масштабной однородности уравнений, определяемых условием сохранения гидродинамической спиральности, неизбежно приводят к условию $\alpha_n = (-1)^n$ для каскадного аналога спиральности.

Рассмотрим еще одно ограничение, естественным образом вытекающее из волновых взаимодействий и не связанное с квадратичными законами сохранения. Это ограничение принципиально при построении нелокальных по масштабам моделей, когда формально присутствуют взаимодействия далеких друг от друга масштабов.

Из представления уравнений движения среды в пространстве волновых векторов следует, что в нелинейном взаимодействии участвуют те и только те волны, из волновых векторов которых можно составить треугольник [1, 3]. Тогда оказывается, что для взаимодействия оболочек с номерами n , $n+i$, $n+j$ пара индексов (i, j) должна лежать в некоторой области, конкретный вид которой зависит от q , но общая форма подобна области F , изображенной на рис. 1. Область всегда неограниченно вытянута в трех направлениях. На рис. 1 дана форма области F при $q \geq 2$. С уменьшением q область расширяется. Схема расчета подобной области пар индексов взаимодействующих оболочек описана, например, в работах [3, 6]. Будем далее рассматривать именно случай $q \geq 2$. Для обеспечения выполнения этого ограничения необходимо потребовать, чтобы все коэффициенты s_{ij} , l_{ij} , w_{ij} , h_{ij} , индексы которых не попадают в область F , были нулевыми.

Из табл. 2 и требования попадания индексов в F видно, что построение каскадных моделей всех рассматриваемых типов сводится к составлению и последующему точному решению однородных систем линейных уравнений большой размерности. Точность необходима, если мы хотим гарантировать выполнение законов сохранения. Даже для малой учитываемой масштабной дальности взаимодействий (например, равной трем) число уравнений для МГД-течения получается равным 197. Понятно, что даже построение такой системы вручную очень проблематично и требует автоматизации, к тому же необходимо ее еще и точно решить.

Поскольку система однородная, возможны ситуации либо только нулевого решения, либо целого линейного многообразия решений. Если решение только нулевое, то

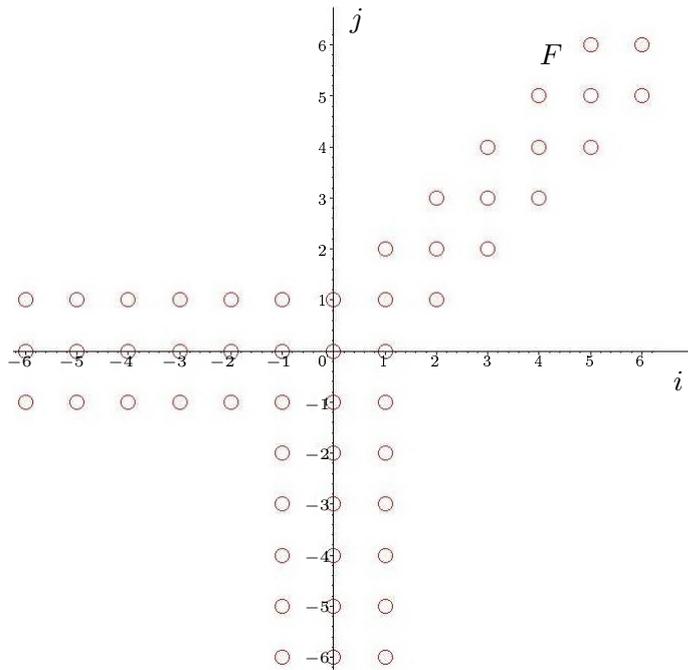


Рис. 1. Область F пар индексов взаимодействующих оболочек при $q \geq 2$
 Fig. 1. Region F of pairs of indices of interacting shells at $q \geq 2$

каскадной модели с требуемым набором инвариантов и заданной масштабной нелокальностью просто не существует. Если решений бесконечно много, то они определяют целый параметрический класс моделей.

3. Схема расчета уравнений модели в символьном пакете

Рассмотрим теперь, как можно формировать систему уравнений для коэффициентов нелинейных взаимодействий в CAS на примере трехмерного МГД-течения. Будем ориентироваться на систему Maple, хотя, с незначительными модификациями, все это можно легко адаптировать для любой другой системы компьютерной алгебры.

Пусть дальность нелинейного взаимодействия в пространстве масштабов (масштабная нелокальность) ограничена сверху целым числом $P \geq 1$. В реальной турбулентной физической системе такое ограничение всегда существует. Эта конечная масштабная нелокальность определяет реальный диапазон изменения i и j . Все коэффициенты s_{ij} , l_{ij} и w_{ij} , хотя бы один из индексов которых по модулю превосходит P , будут нулевыми. Поскольку все уравнения на коэффициенты взаимодействий являются линейными однородными, то уравнения, где все члены содержат по индексу, модуль которого больше P , окажутся тождествами. Получается, что введение ограничений по дальности взаимодействий выделяет в полученных выше бесконечных системах уравнений конечные подсистемы. Именно эти подсистемы мы будем формировать и решать, используя средства CAS.

Отметим также, что каждое уравнение в табл. 2 определяется парой индексов (i, j) , причем в этом уравнении присутствуют только коэффициенты с индексами $(\pm i, \pm j)$, $(\pm i, \pm(i-j))$ и $(\pm j, \pm(i-j))$. Других комбинаций не возникает. Поэтому необязательно будут вырождаться в тождества только те уравнения, у которых определяющие их

индексы (i, j) удовлетворяют условию

$$(|i| \leq P \wedge |j| \leq P) \vee (|i| \leq P \wedge |i - j| \leq P) \vee (|j| \leq P \wedge |i - j| \leq P), \quad (17)$$

т. е. лежат в звездообразной области D , изображенной на рис. 2. В дальнейшем нам понадобится предикат $d(i, j)$, выделяющий область D и определяемый выражением (17). Ясно также, что если мы выбираем пару $(i, j) \in D$, то $|i| \leq 2P$, $|j| \leq 2P$ и $|i - j| \leq 2P$. Тогда наборы рассчитываемых коэффициентов естественно представить в CAS с помощью двумерных массивов, индексы которых меняются от $-2P$ до $2P$. Если используется система, не поддерживающая массивы с отрицательными индексами, достаточно использовать сдвиг на $2P$ по каждому индексу. Пакет Maple допускает отрицательные индексы, поэтому будем работать с ними.

Теперь введем предикат $f(i, j)$, выделяющий область F пар индексов взаимодействующих оболочек (см. рис. 1). Ясно, что

$$f(i, j) = (|i| \leq 1 \wedge |j| \leq 1) \vee (|j| \leq 1 \wedge |i| \leq 1) \vee (|i| \geq 1 \wedge |j| \geq 1 \wedge |i - j| \leq 1).$$

Тогда все элементы массивов, индексы которых удовлетворяют условию

$$\neg f(i, j) \vee |i| > P \vee |j| > P,$$

должны быть нулевыми, а остальным должны быть присвоены символьные значения, которые далее будут компонентами вектора неизвестных в составляемой системе уравнений. Приведем соответствующий фрагмент кода Maple.

```
1
2  f:=(i,j)->( abs(i)<=1 and j<=1 ) or ( abs(j)<=1 and i<=1 ) or
```

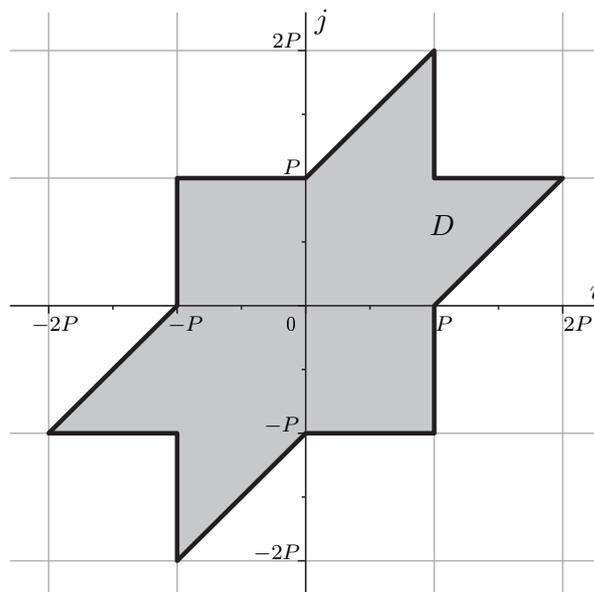


Рис. 2. Область D пар индексов, соответствующих уравнениям, которые могут не вырождаться в тождества

Fig. 2. Domain D of pairs of indices corresponding to equations that may not degenerate into identities

```

3           ( i>=1 and j>=1 and abs(i-j)<=1 );
4   k:=1:
5   for i from -2*P to 2*P do for j from -2*P to 2*P do
6       if ( not(f(i,j)) or abs(i)>P or abs(j)>P ) then
7           s[i,j]:=0: l[i,j]:=0: w[i,j]:=0:
8       else
9           s[i,j]:=x[k]: k:=k+1:
10          l[i,j]:=x[k]: k:=k+1:
11          w[i,j]:=x[k]: k:=k+1:
12      end if:
13  end do: end do:
14  NumVar:=k-1:

```

В результате выполнения этого фрагмента кода искомым коэффициентам в качестве символьных значений будут присвоены неопределенные компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{NumVar})^T$.

Далее для левой части уравнений из табл. 2 необходимо составить выражения в случае техмерного МГД-течения для каждой пары индексов из области D . Целесообразно контролировать, не окажется ли это выражение нулевым, так как тогда уравнение выродится в тождество. Соответствующий фрагмент кода Maple выглядит так:

```

40  d:=(i,j)->( abs(i)<=P and abs(j)<=P ) or
41      ( abs(i)<=P and abs(i-j)<=P ) or ( abs(j)<=P and abs(i-j)<=P );
42  m:=1:
43  for i from -2*P to 2*P do for j from -2*P to 2*P do if d(i,j) then
44      expr:=(s[i,j]+s[j,i])+q^i*(s[-i,j-i]+s[j-i,-i])+q^j*(s[-j,i-j]+s[i-j,-j]):
45      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
46      expr:=l[i,j]+l[j,i]+q^j*w[-j,i-j]+q^i*w[-i,j-i]:
47      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
48      expr:=(l[i,j]+l[j,i])+q^i*(l[-i,j-i]+l[j-i,-i])+q^j*(l[-j,i-j]+l[i-j,-j]):
49      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
50      expr:=w[i,j]+q^i*w[-i,j-i]+q^j*s[i-j,-j]+q^j*s[-j,i-j]:
51      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
52      expr:=w[i,j]+(-1)^j*w[i-j,-j]:
53      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
54      expr:=s[i,j]-s[j,i]:
55      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
56      expr:=l[i,j]-l[j,i]:
57      if (expr<>0) then g[m]:=expr: m:=m+1: end if:
58  end if: end do: end do:
59  NumEq:=m-1:

```

В результате выполнения этого фрагмента кода будут сформированы выражения левых частей уравнений для коэффициентов и записаны в качестве символьных значений в компоненты вектора $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{NumEq})^T$. В строках 44–47 строятся уравнения для сохранения полной энергии, в строках 48–51 — для перекрестной спиральности, в строках 52, 53 — для сохранения магнитной спиральности, в строках 54–57 задается симметрия матриц коэффициентов s_{ij} и l_{ij} .

Теперь формируем основную матрицу A нашей линейной системы и решаем ее:

```

70  A:=Matrix(NumEq,NumVar):
71  O_:=Vector(NumEq):
72  for i from 1 to NumEq do for j from 1 to NumVar do
73      A[i,j]:=coeff(g[i],x[j]):
74  end do: end do:
75  y:=LinearSolve(A,O_):
    
```

Поясним, что команда в строке 73 в выражении g_i выделяет коэффициент при переменной x_j и записывает его в (i, j) -элемент матрицы A . Команда в строке 75 дает общее решение в параметрической форме однородной линейной системы с матрицей A и записывает его компоненты в вектор \mathbf{y} . Далее компоненты этого вектора очевидным образом можно перенести в массивы коэффициентов.

Применение описанной схемы и кода в рассмотренном случае трехмерного МГД-потока при $P = 2$ дало следующие результаты (приводим только ненулевые коэффициенты):

$$\begin{aligned}
 s_{-2,-1} &= s_{-1,-2} = t_1, & s_{-1,1} &= s_{1,-1} = q(q-1)t_1, & s_{1,2} &= s_{2,1} = -q^3t_1, \\
 l_{-2,-1} &= l_{-1,-2} = -\frac{q+1}{2q}(2qt_1+t_2), & l_{-1,1} &= l_{1,-1} = \frac{q^2-1}{2q}t_2, \\
 l_{1,2} &= l_{2,1} = q^2(q+1)t_1 + \frac{q+1}{2}t_2, \\
 w_{-2,-1} &= w_{-1,1} = -\frac{2q^2t_1+t_2}{q}, & w_{-1,-2} &= -w_{1,2} = -t_2, \\
 w_{1,-1} &= w_{2,1} = 2q^2t_1 + qt_2.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Получается двухпараметрический класс каскадных моделей для любого $q \geq 2$.

Конечно, для $P = 2$ можно получить выражения для этих коэффициентов вручную, не составляя общих уравнений из табл. 2, а просто сведя подобные слагаемые в производные квадратичных форм. Однако достоинство предложенной схемы в том, что она работает для любых значений масштабной нелокальности P , причем позволяет избегать ошибок при алгебраических выкладках.

4. Существование стационарных степенных решений

Известным свойством развитой турбулентности, которое должны воспроизводить и каскадные модели, являются степенные спектральные законы в пределах инерционного интервала. Поскольку коллективные переменные осмысливаются как меры пульсаций соответствующих масштабов, проявлением спектральных законов для энергии в каскадных моделях будут стационарные решения степенной формы.

Формируемую и решаемую в CAS систему уравнений для коэффициентов модели можно дополнить, чтобы обеспечить существование стационарных степенных решений. Покажем, как это можно сделать на примере рассмотренной выше модели для трехмерного МГД-течения.

В модели (6) положим $\text{Re} = \text{Re}_m = \infty$ и $f_n = 0$ и подставим в нее стационарные решения вида $u_n = u_0 k_n^\alpha = u_0 q^{n\alpha}$ и $B_n = B_0 k_n^\alpha = B_0 q^{n\alpha}$. Поскольку за счет перемасштабирования переменных скорости и магнитного поля можно добиться, чтобы $u_0 = B_0$, получим два однородных линейных уравнения относительно коэффициентов модели:

$$\sum_{i,j} s_{ij} q^{\alpha(i+j)} + \sum_{i,j} l_{ij} q^{\alpha(i+j)} = 0, \quad \sum_{i,j} w_{ij} q^{\alpha(i+j)} = 0. \tag{19}$$

Эти уравнения и необходимо добавить к системе на коэффициенты взаимодействий. В приведенном выше коде Maple заменим строку 59 следующим фрагментом:

```

59  g[m]:=sum(sum((s['i'],'j']+1['i'],'j'])*q^(alpha*('i'+'j'))),
60          'i'=-P..P), 'j'=-P..P):
61  g[m+1]:=sum(sum((w['i'],'j'])*q^(alpha*('i'+'j'))), 'i'=-P..P), 'j'=-P..P):
62  NumEq:=m+1:

```

Можно добавить и несколько групп уравнений типа (19) с различными α , если мы хотим обеспечить существование нескольких стационарных степенных решений. Понятно, что добавление таких уравнений может снизить, но необязательно снижает, число независимых переменных в общем решении для коэффициентов взаимодействий. В частности, возможна ситуация, когда их добавление приведет к системе только с нулевыми решениями. Это говорит о том, что каскадной модели с таким набором инвариантов и спектральных законов не существует.

Энергии пульсаций скорости и магнитного поля в n -й масштабной оболочке определяются соответственно выражениями u_n^2 и B_n^2 , которые для стационарных степенных решений будут, очевидно, пропорциональны $q^{2\alpha n}$. Если же для энергии пульсаций $E(k)$ в турбулентной системе выполняется спектральный закон $E(k) \sim k^\lambda$, то энергия во всей n -й масштабной оболочке $E_n \sim q^{(\lambda+1)n}$ [2]. Поэтому спектральному закону для энергии с показателем λ в каскадной модели будет соответствовать степенное решение с показателем $\alpha = (\lambda + 1)/2$.

Тогда, например, колмогоровскому спектру для энергии с $\lambda = -5/3$ будет соответствовать $\alpha = -1/3$. Оказалось, что добавление уравнений (19) при $\alpha = -1/3$ не изменяет решения (18). Поэтому можно сказать, что формулы (18) определяют класс каскадных моделей, в которых существует стационарное решение, соответствующее колмогоровскому спектру.

Конечно, обеспечив существование стационарных степенных решений, мы не можем гарантировать их устойчивость. Однако выяснение устойчивости в общем формульном виде уже не представляется возможным. Необходимо фиксировать числовые значения параметров и проводить вычислительные эксперименты с конкретной моделью. Такие расчеты уже не относятся к предмету настоящей работы, но предлагаемая методика в принципе позволяет генерировать модели со степенными решениями.

Заключение

Известно большое число каскадных моделей турбулентности. Различные модели воспроизводят те или иные характеристики турбулентности, но модели, которая воспроизводила бы все режимы турбулентности, не существует. Поэтому для изучения турбулентности в рамках каскадного подхода очень полезен программный инструментальный, который позволял бы быстро генерировать классы моделей, удовлетворяющих тем или иным наборам законов сохранения. Выбор конкретной модели в пределах этих классов можно потом конкретизировать, используя дополнительные физические соображения, например существование заданного распределения вероятностей взаимодействия тех или иных оболочек.

В статье описана разработанная методика построения каскадных моделей, в которой составление системы уравнений на коэффициенты нелинейных взаимодействий в модели и ее точное решение реализуются с помощью систем компьютерной алгебры.

Методика позволяет варьировать размеры нелокальности нелинейного взаимодействия в пространстве масштабов и выражения для каскадных аналогов законов сохранения и спектральных законов. Данная методика и реализующие ее программы решают задачи быстрой и безошибочной генерации целых классов каскадных моделей.

Представляется, что предложенная методика окажется полезной для изучения свойств турбулентности в рамках каскадных моделей.

Список литературы

- [1] **Ditlevsen P.D.** Turbulence and shell models. N.Y.: Cambridge University Press; 2011: 152.
- [2] **Фрик П.Г.** Турбулентность: Подходы и модели. М.; Ижевск: РХД; 2010: 332.
- [3] **Plunian F., Stepanov R.A., Frick P.G.** Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. Physics Reports. 2013; (523):1–60.
- [4] **Frick P., Dubrulle B., Babiano A.** Scaling properties of a class of shell models. Physical Review E. 1995; (51):5582–5593.
- [5] **Hattori Y., Rubinstein R., Ishizawa A.** Shell model for rotating turbulence. Physical Review E. 2004; 70(4):046311.
- [6] **Plunian F., Stepanov R.** A non-local shell model of hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence. New Journal of Physics. 2007; (9):294. DOI:10.1088/1367-2630/9/8/294.
- [7] **Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.** Компьютерная алгебра: Пер. с фран. М.: Мир; 1991: 352.
- [8] **Чичкарёв Е.А.** Компьютерная математика с Maxima. М.: ALT Linux; 2012: 384.
- [9] **Матросов А.В.** Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ; 2001: 528.
- [10] **Vodinchar G., Feshchenko L.** Symbolic computations in simulations of hydromagnetic dynamo. E3S Web of Conferences. 2017; (20):02017.
- [11] **Vodinchar G.** Using symbolic calculations to calculate the eigenmodes of the free damping of a geomagnetic field. E3S Web of Conferences. 2018; (62):02018.

Automated generation of turbulence shell models by the methods of computer algebra

VODINCHAR GLEB M., FESHCHENKO LIUBOV K.*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, Russia

*Corresponding author: Feshchenko Liubov K., e-mail: Feshchenko.lk@yandex.ru

Received April 20, 2021, revised July 22, 2021, accepted July 30, 2021.

Abstract

There is a great variety of shell turbulence models. Such models reproduce certain characteristics of turbulence. A model that could reproduce all turbulence regimes does not exist at the moment. Information about a particular model is contained in a set of persistent quantities, which are some

quadratic forms of turbulent fields. These quadratic forms should be formal analogs of the exact conserved quantities. It is important to note that the main idea of Shell models presupposes a refusal to describe the geometric structure of movements. At the same time, it is well known that turbulent processes in spaces of two and three dimensions behave differently. Therefore, the provision of certain combinations of conserved quantities allows indirect introducing into the shell model the information about the dimension of the physical space in which the turbulent process develops.

Purpose. The aim of this work was to create software tools that would quickly generate classes of models that satisfy one or another set of conservation laws. The choice of a specific model within these classes can then be specified using additional physical considerations, for example, the existence of a given probability distribution for the interaction of certain shells.

Methods. The developed technique for generating equations of shell turbulence models is carried out using symbolic computation systems (computer algebra systems — CAS). Note that symbolic packages are used not for studying ready-made shell models, but for the automated generation of the equations of these models themselves. The technique allows varying the value of the scale nonlocality of the model, the form of the quadratic conservation laws and spectral laws, the denominator of the geometric progression of scales. It allows quickly and accurately generating the entire set of classes of the models. It can be used to develop shell models of hydrodynamic, magnetohydrodynamic and convective turbulent systems.

Findings. It seems that the proposed technique will be useful for studying the properties of turbulence in the framework of cascade models.

Keywords: turbulence, cascade models, computer algebra, automation of model development.

Citation: Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Automated generation of turbulence shell models by the methods of computer algebra. Computational Technologies. 2021; 26(5):65–80. DOI:10.25743/ICT.2021.26.5.006. (In Russ.)

References

1. **Ditlevsen P.D.** Turbulence and shell models. N.Y.: Cambridge University Press; 2011: 152.
2. **Frick P.G.** Turbulentnost': Podkhody i modeli [Turbulence: Approaches and models]. M.; Izhevsk: RKhD; 2010: 332. (In Russ.)
3. **Plunian F., Stepanov R.A., Frick P.G.** Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. Physics Reports. 2013; (523):1–60.
4. **Frick P., Dubrulle B., Babiano A.** Scaling properties of a class of shell models. Physical Review E. 1995; (51):5582–5593.
5. **Hattori Y., Rubinstein R., Ishizawa A.** Shell model for rotating turbulence. Physical Review E. 2004; 70(4):046311.
6. **Plunian F., Stepanov R.** A non-local shell model of hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence. New Journal of Physics. 2007; (9):294. DOI:10.1088/1367-2630/9/8/294.
7. **Davenport J., Siret Y., Tournier E.** Calcul formel: Syst'emes et algorithmes de manipulations alg'ebriques. Paris: Masson; 1987: 263.
8. **Chichkarev E.A.** Komp'yuternaya matematika s Maxima [Computer mathematics with Maxima]. Moscow: ALT Linux; 2012: 384. (In Russ.)
9. **Matrosov A.V.** Maple 6. Reshenie zadach vysshey matematiki i mekhaniki [Maple 6. Solution of problems of advanced mathematics and mechanics]. SPb.: BKhV; 2001: 528. (In Russ.)
10. **Vodinchar G., Feshchenko L.** Symbolic computations in simulations of hydromagnetic dynamo. E3S Web of Conferences. 2017; (20):02017.
11. **Vodinchar G.** Using symbolic calculations to calculate the eigenmodes of the free damping of a geomagnetic field. E3S Web of Conferences. 2018; (62):02018.