

# Об одной эредитарной колебательной системе с учетом эффекта stick-slip

ПАРОВИК Р. И.

## Аннотация

В работе была предложена математическая модель, которая описывает эффект прилипания скольжения (stick-slip) с учетом эредитарности. Была построена явная конечно-разностная схема для соответствующей задачи Коши. Построены на ее основе осциллограммы и фазовые траектории.

*Ключевые слова:* эредитарность, stick-slip эффект, осциллограммы, фазовая траектория.

## Введение

Эффект stick-slip (прилипания-скольжения) встречается в задачах трибологии, например когда исследуется движение груза на пружине вдоль поверхности. За счет адгезии груз прилипает к поверхности, а за счет натяжения пружины отрывается и скользит вдоль нее при этом происходят его колебания [1, 2, 3]. Эффект stick-slip может также быть заложен в основу механической модели землетрясения в зоне субдукции литосферных плит [4].

В этой работе мы будем исследовать нелинейный эредитарный осциллятор, который характеризует эффект stick-slip [5, 6]. Напомним, что в работах [5, 6] мы рассматривали модельное уравнение эффекта stick-slip с учетом эредитарности с производными дробных постоянных порядков.

В этой работе мы рассмотрим эредитарный осциллятор stick-slip эффекта с дробными производными переменных порядков, которые являются ограниченными функциями. Причем порядки дробных производных могут зависеть не только от переменной  $t$ , но и от самой функции смещения  $x(t)$ . Введение таким образом дробных управляющих параметров в модельное уравнение, обобщает рассмотренный в третьей главе нелинейный эредитарный осциллятор с учетом stick-slip эффектом, что несомненно может привести к новым свойствам или эффектам в результате математического моделирования.

Далее мы построим явную конечно-разностную схему для численного счета решения обобщенной модели stick-slip эффекта с переменными дробными порядками. Далее рассмотрим некоторые примеры применения этой схемы с различными значениями управляющих параметров, построим и исследуем фазовые траектории.

## Постановка задачи и методика решения

Найти решение  $x(t)$ , где  $t \in [0, T]$  следующей задачи Коши:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) + \omega^{\beta(x(t),t)} x(t) = f(x(t), t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad (2)$$

где  $\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau)$  и  $\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau)$  — операторы производных Герасимова-Капуто дробных порядков  $1 < \beta(x(t), t) < 2, 0 < \gamma(x(t), t) < 1, f(x(t), t) = bt + c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx(t))$ ,  $b$  — скорость перемещения пружины,  $c$  — энергия адгезии,  $\lambda$  — коэффициент трения,  $\omega$  — частота свободных колебаний,  $a_n = 2n \int_0^1 \frac{\cos(\pi n \tau)}{\cosh^2(\pi \tau)} d\tau$  — коэффициенты разложения ряда Фурье.

Операторы Герасимова-Капуто, входящие в модельное уравнение (1), могут быть записаны, согласно в виде:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta(x(t),t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(x(t),t)-1}}, \quad (3)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma(x(t),t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\gamma(x(t),t)}}.$$

Поэтому фактически, с учетом представления (3), ставится задача Коши (1).

Задача Коши (1) в случае, когда дробные параметры  $\beta$  и  $\gamma$  являются константами, переходит в задачу Коши [5], если эти константы равны  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$ , то приходим к задаче Коши для классического эффекта stick-slip [3].

Задача Коши (1) и (2) в общем случае не имеет явного решения, поэтому мы будем решать эту задачу численно с помощью теории конечно разностных схем [7, 8].

Построим явную конечно-разностную схему, так как ее проще всего реализовать на ЭВМ. Разобьем временной промежуток  $[0, T]$  на  $N$  равных частей с шагом  $\tau = T/N$ . Тогда функция решения  $x(t)$  дифференциальной задачи Коши (1) и (2) перейдет в сеточную функцию  $x(t_j)$ , где  $t_j = j\tau$ ,  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ , которая будет являться решением соответствующей разностной задачи Коши.

Остановимся более подробно на аппроксимации операторов дробного дифференцирования (3) и (?). Следуя определениям из работы [9], получаем следующие их дискретные аналоги для операторов (3):

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\beta(x_j, t_j)}}{\Gamma(3 - \beta(x_j, t_j))} \sum_{k=0}^{j-1} p_k^j (x_{j-k-1} - 2x_{j-k} + x_{j-k+1}), \quad (4)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\gamma(x_j, t_j)}}{\Gamma(2 - \gamma(x_j, t_j))} \sum_{k=0}^{j-1} q_k^j (x_{j-k-1} - 2x_{j-k} + x_{j-k+1}), \quad (5)$$

$$p_j^k = (k+1)^{2-\beta(x_j, t_j)} - k^{2-\beta(x_j, t_j)}, \quad p_j^k = (k+1)^{1-\gamma(x_j, t_j)} - k^{1-\gamma(x_j, t_j)}.$$

В соотношениях (4)-(5) была использована сокращенная запись:  $x(t_j) = x_j$ .

Исходя из соотношений (4)-(5), которые подставим в уравнение (1) с учетом начальных условий (2), мы получаем явную конечно-разностную схему.

$$x_1 = \tau y_0 + x_0, \quad j = 0,$$

$$x_{j+1} = A_j x_j - B x_{j-1} - B \sum_{k=1}^{j-1} p_k^j (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) - \quad (6)$$

$$- C \sum_{k=1}^{j-1} q_k^j (x_{j-k+1} - x_{j-k}) - \nu \sin(x_j) + \xi f_j, \quad j = 1, \dots, N - 1,$$

$$A_j = \frac{2A_1 + B_1 - \omega^{\beta(x(t_j), t_j)}}{A_1 + B_1}, \quad B = \frac{A_1}{A_1 + B_1}, \quad C = \frac{B_1}{A_1 + B_1}, \quad \nu = \frac{\omega^{\beta(x(t_j), t_j)}}{A_1 + B_1},$$

$$\xi = \frac{1}{A_1 + B_1}, \quad A_1 = \frac{\tau^{-\beta(x(t_j), t_j)}}{\Gamma(3 - \beta(x(t_j), t_j))}, \quad B_1 = \frac{\lambda \tau^{-\gamma(x(t_j), t_j)}}{\Gamma(2 - \gamma(x(t_j), t_j))},$$

Заметим, что явная конечно-разностная схема (6) в случае когда дробные параметры являются константами и имеют значения  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$ , переходят в локальные расчетные явные конечно-разностным схемы для классического эффекта stick-slip.

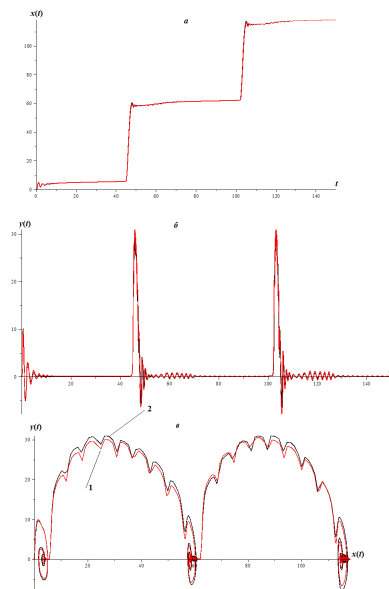


Рис. 1. Расчетные кривые, полученные по формулам (6) (кривая 1) и (??) (кривая 2): а) - осциллограмма, б) - скорость осциллятора, в) - фазовая траектория

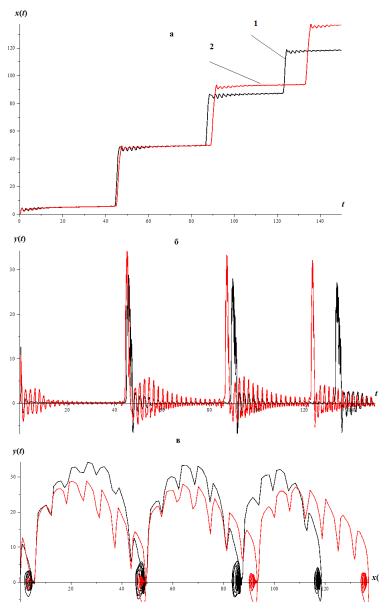


Рис. 2. Расчетные кривые, полученные по формулам (6) и (??): а) - осциллограмма, б) - скорость осциллятора, в) - фазовая траектория

## Результаты численного моделирования

В работе [3] было сказано, что для получения достоверного решения достаточно взять первые семь коэффициентов  $a_k$  в разложении функции  $f(x(t), t)$  (1). Значения этих коэффициентов возьмем из работы [3]:  $a_1 = 0.436, a_2 = 0.344, a_3 = 0.164, a_4 = 0.058, a_5 = 0.021, a_6 = 0.004, a_7 = 0.003$ .

Проведем численное моделирование эрeditарного эффекта stick-slip по формулам (6) и (??) в зависимости от управляющих параметров. Сначала мы рассмотрим зависимость дробных управляющих параметров только от времени  $t$ , т.е.  $\beta = \beta(t)$  и  $\gamma = \gamma(t)$ . Потом рассмотрим более общий случай, когда эти дробные параметры зависят еще и от смещения  $x(t)$ .

Управляющие параметр:  $\beta(t) = 1.8 - 0.03 \sin(\pi t), \gamma(t) = 0.6 - 0.04 \cos(\pi t), N =$

3000,  $\delta = 50$ ,  $\tau = 0.05$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $y_0 = 0.3$ ,  $x_0 = 0$ .

На рис. 1 представлены расчетные кривые смещения, скорости смещения и фазовая траектория. На рис. 1а приведена осциллограмма для примера 5.8. Видно, что при отрыве груз испытывает колебания, причем скорость таких осцилляций в потенциальной яме затухает достаточно медленно (1)б. Этот эффект является эрeditарностью процесса. На фазовой траектории (1)в видно, что потенциальные ямы представляют собой устойчивые фокусы.

Управляющие параметр:  $\beta(t) = 1.6 - 0.1 \sin(\pi t)$ ,  $\gamma(t) = 0.6 - 0.2 \cos(\pi t)$ ,  $N = 3000$ ,  $\tau = 0.05$ ,  $\delta = 50$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $y_0 = 0.3$ ,  $x_0 = 0$ .

## Литература

- [1] Дедков Г.В. Нанотрибология: экспериментальные факты и теоретические модели // Успехи физических наук. 2000. Т. 170, № 6. С. 585–618.
- [2] Daub E., Carlson J. Stick-slip instabilities and shear strain localization in amorphous materials // Physical Review E. 2009. Vol. 80, no. 6. P. 066113.
- [3] Рехвиашвили С.Ш. Размерные явления в физике конденсированного состояния и нанотехнологиях. Нальчик: КБНЦ РАН, 2014. 250 с.
- [4] Scholz C. H. The mechanics of earthquakes and faulting. Cambridge university press, 2002. 471 p.
- [5] Паровик Р.И. Математическое моделирование эффекта stick-slip учетом эрeditарности // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 70–77.
- [6] Parovik R. Mathematical modeling of the sick-slip considering hereditarity. Proceedings of International Russian-Chinese Conference «On Actual Problems of Applied Mathematics and Problems and Modern Problems of Algebra, Analysis and Informatics». Elbrus, Kabardino-Balkarian Republic, December 14-18, 2015. P. 159–160.
- [7] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
- [8] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- [9] Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эрeditарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. 178 с.