

Инверсии магнитного поля в одной маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо

Водинчар Г. М.^{1,2}, Годомская А. Н.¹, Шереметьева О. В.^{1,2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

с. Паратунка, Камчатский край, Россия

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга

г. Петропавловск-Камчатский, Россия

e-mail: gvodinchar@ikir.ru

Известным свойством динамо-систем является наличие инверсий – резкой смены полярности магнитного поля, без существенной перестройки движения проводящей среды. Реальные космические динамо-системы демонстрируют как регулярный характер инверсий, например солнечный цикл, так и крайне хаотичный – Земля. Протяженность различных интервалов времени между инверсиями (интервалов полярности) у геомагнитного поля отличается на несколько порядков [1].

Прямое численное моделирование магнитогидродинамических уравнений позволяет воспроизвести многочисленные режимы инверсий, но не отвечает на вопрос об их причине. Поэтому с помощью простых динамических систем малой размерности пытаются объяснить физическую причину, признаки, важнейшие свойства этого явления.

В настоящей работе мы моделируем инверсии поля в одной простой модели $\alpha\Omega$ -динамо. Эта трехмодовая модель с флуктуирующими управляющими параметрами. Источник этих флуктуаций можно осмыслить как результат синхронизации высших отброшенных мод скорости и магнитного поля. Такое спонтанное формирование и разрушение когерентных структур хорошо известно в теории турбулентности [2].

Рассмотрим сферическую оболочку вязкой проводящей жидкости во вращающейся системе координат. Начало координат совпадает с центром оболочки, а Oz – ось вращения. Будем использовать также сферические координаты (r, θ, φ) . На внутренней r_1 и внешней r_2 границах оболочки скорость нулевая. Такая постановка задачи граничных условий характерна для геодинамо и задается для определенности. Для магнитного поля ставятся вакуумные условия на внешней границе.

Физические параметры оболочки считаем неизменными. Полагаем также, что турбулентность в ядре изотропная, а α -эффект антисимметричен относительно экватора. Поэтому принимаем скалярную параметризацию α -эффекта в виде $\alpha(r, \theta) = \alpha_0 a(r) \cos \theta$, где $\max |a(r)| \sim 1$, а $\alpha_0 > 0$ определяет интенсивность α -эффекта.

Обезразмеренные уравнения динамо можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= R_m \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + R_\alpha \nabla \times (a(r) \cos \theta \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R_m – магнитное число Рейнольдса, а R_α – амплитуда α -эффекта. Поле скорости \mathbf{v} считается заданным и постоянным. Такой вид безразмерных уравнений соответствует выбору радиуса r_2 в качестве пространственного масштаба L , времени магнитной диффузии L^2/ν_m в качестве временного масштаба (ν_m – коэффициент магнитной диффузии), и некоторых характерных единиц скорости U и магнитной индукции B_0 .

В простых вариантах $\alpha\Omega$ -динамо считается, что движение среды – дифференциальное вращение, т.е. поле \mathbf{v} тороидальное. Однако известно, что в реальности это движение является конвекцией и \mathbf{v} включает полоидальную компоненту. Поэтому мы задаем поле скорости как линейную комбинацию нескольких мод свободной диссипации жидкости в

оболочке. Все такие моды имеют вид $\mathbf{v}_{k,n,m}^T = \nabla \times [R_{kn}^T(r)Y_n^m(\theta, \varphi)\mathbf{r}]$ (тороидальные) и $\mathbf{v}_{k,n,m}^P = \nabla \times \nabla \times [R_{kn}^P(r)Y_n^m(\theta, \varphi)\mathbf{r}]$ (полоидальные), где индекс k определяет количество слоев конвекции в радиальном направлении. В аксиально симметричном случае $m = 0$. Параметры функции $R_{kn}^T(r)$ и $R_{kn}^P(r)$ зависят от величины аспектного отношения r_1/r_2 . Мы использовали в расчетах земное значение 0.35.

Дифференциальному вращению соответствуют моды $\mathbf{v}_{k,1,0}^T$. Они входят в линейную оболочку множества $\{\mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots\}$, которая инвариантна относительно кориолисова сноса. Из любой такой моды за счет вращения возбуждаются остальные по цепочке. Тогда, в самом простом случае, полоидальная компонента скорости – это $\mathbf{v}_{0,2,0}^P$. Оказывается, что распределение направления ее кориолисова сноса в объеме оболочки хорошо аппроксимируется комбинацией четырех тороидальных мод: $\mathbf{v}_{0,1,0}^T, \mathbf{v}_{1,1,0}^T, \mathbf{v}_{0,3,0}^T, \mathbf{v}_{1,3,0}^T$. Поэтому, мы задаем скорость как комбинацию этих пяти мод. Коэффициенты выбираем так, чтобы эта комбинация аппроксимировала одну из мод оператора Пуанкаре. Схема расчета таких аппроксимаций описана в [3].

Для представления магнитного поля мы будем использовать некоторые из мод омической диссипации $\mathbf{B}_{k,n,m}^T$ и $\mathbf{B}_{k,n,m}^P$. Их структура подобна описанным выше модам свободной диссипации скорости.

Селекцию магнитных мод произведем по следующей схеме, предложенной в [4].

Пусть магнитное поле представлено линейной комбинацией нескольких мод. Подставим это разложение в уравнение индукции (1) и применим метод Галеркина. Получим систему

$$\frac{dg_k}{dt} = \text{Re}_m \sum_i W_{ki}g_i + R_\alpha \sum_i A_{ki}g_i - \eta_k g_k, \quad (2)$$

где $g_k(t)$ – амплитуды отобранных мод, а η_k – их собственные значения. Матрицы W и A образованы галеркинскими коэффициентами.

Рассмотрим собственные значения матрицы системы (2). Назовем лидирующим и обозначим λ то из них, которое имеет наибольшую действительную часть. Соответствующую ему моду также назовем лидирующей. Ясно, что динамо работает, тогда и только тогда, когда $\Re \lambda > 0$. Решения будут осциллирующими, если число λ мнимое.

В соответствии с подходами работы [4] магнитное поле представляется минимальным количеством низших (по собственным значениям) мод, достаточных для получения осциллирующего динамо.

Варьируя параметры Re_m и R_α мы установили, что осциллирующие решения возникают, если ограничиться следующими тремя низшими модами: $\mathbf{B}_{0,1,0}^P$ (диполь), $\mathbf{B}_{0,2,0}^T$ и $\mathbf{B}_{0,3,0}^P$. Далее будем обозначать их $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ соответственно.

Разумеется, собственные значения системы (2) зависят и от вида радиальной части α -эффекта $a(r)$. Мы использовали три варианта: $a(r) = 1$, $a(r) = r$, $a(r) = 1/r$.

Отметим, что в работе [4] для получения осциллирующего решения авторам потребовалось 5 магнитных мод для динамо в звезде с тонкой конвективной оболочкой, но они использовали тороидальную скорость типа дифференциального вращения. Скорее всего, меньшее число мод в нашей работе можно объяснить более сложной структурой поля скорости.

На рис. 1 изображены области осциллирующего и неосциллирующего динамо для $a(r) = 1/r$. Другие варианты $a(r)$ дают очень похожие области, поэтому далее мы ограничиваемся только этой зависимостью.

Введем теперь в систему (2) механизм алгебраического подавления α -эффекта и осцилляции:

$$\frac{dg_k}{dt} = \text{Re}_m(1 + \zeta(t)) \sum_i W_{ki}g_i + \frac{R_\alpha(1 + \xi(t))}{1 + \sum_j g_j^2} \sum_i A_{ki}g_i - \eta_k g_k, \quad (3)$$

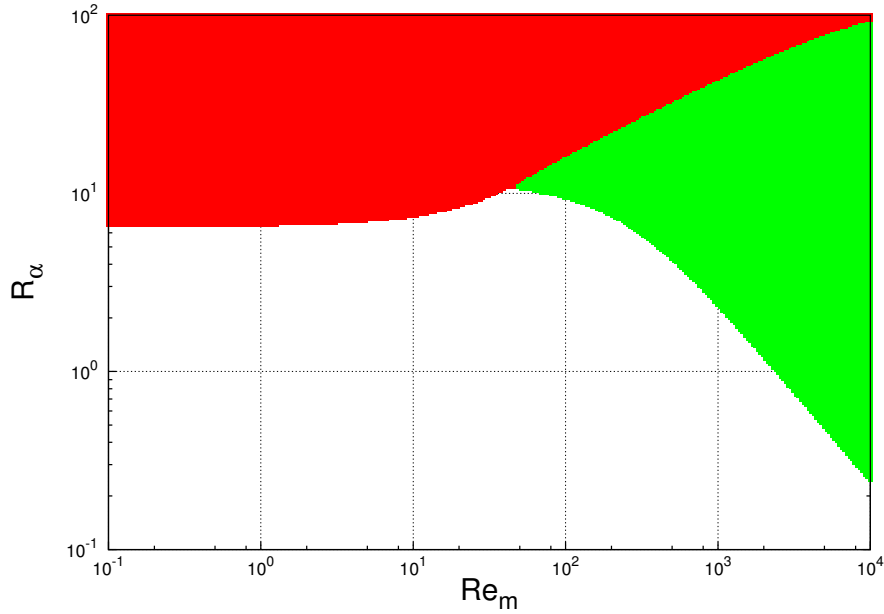


Рис. 1. Области генерации поля. Красные точки – неосциллирующее динамо; зеленые точки – осциллирующее динамо.

где $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ стохастические процессы с нулевым средним.

Как говорилось выше, эти процессы моделируют спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод скорости и магнитного поля. Структура процессов следующая.

Зададим на оси времени случайную последовательность точек $0 < \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_k < \theta_k < \dots$. Будем считать, что k -ая по счету когерентная структура образуется в момент τ_k и разрушается в момент θ_k . Тогда $T_k^{est} = \tau_k - \theta_{k-1}$ – время ожидания формирования очередной структуры, а $T_k = \theta_k - \tau_k$ – время ее существования. В течение времени ожидания процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ нулевые, а в течение времени существования $\zeta(t) = \zeta_k$ и $\xi(t) = \xi_k$. Здесь ζ_k и ξ_k независимые случайные величины с нулевым средним. Законы распределения этих величин, а также T_k^{est} и T_k выбираются при численном моделировании.

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с моделью (3).

Из рис. 1 видно, что точкой бифуркации в линейном приближении (2) является граничная точка красной, зеленой и белой областей, т.е. $(Re_m, R_\alpha) \approx (49, 11)$.

Сначала мы проводили расчет решений системы (3) при (Re_m, R_α) из окрестности точки (49, 11) и тождественно нулевым $\zeta(t)$ и $\xi(t)$. В нелинейном случае точка бифуркации сместилась в $(Re_m, R_\alpha) \approx (42.15, 5.45)$. Оказалось также, что система сильно чувствительна не только к изменению параметров, но и к начальным условиям.

Поэтому можно было ожидать, что влияние даже малых по интенсивности флуктуаций будет переключать модель между различными режимами динамо.

Выбирая различные значения (Re_m, R_α) из малой окрестности точки бифуркации и различные начальные условия, мы получали разнообразные режимы динамо: квазипериодические, динамо-всплески, исчезновение поля с последующим возбуждением, нерегулярные перебросы.

На рис. 2 приведены примеры двух реализаций. По вертикальной оси отложена безразмерная амплитуда дипольной компоненты.

Вверху приводится в основном квазипериодическое решение. Есть лишь отдельные сбои в динамо-цикле. Такое решение похоже на солнечное динамо. Стоит отметить почти полное исчезновение поля при $340 \leq t \leq 370$ и на нескольких более коротких промежутках.

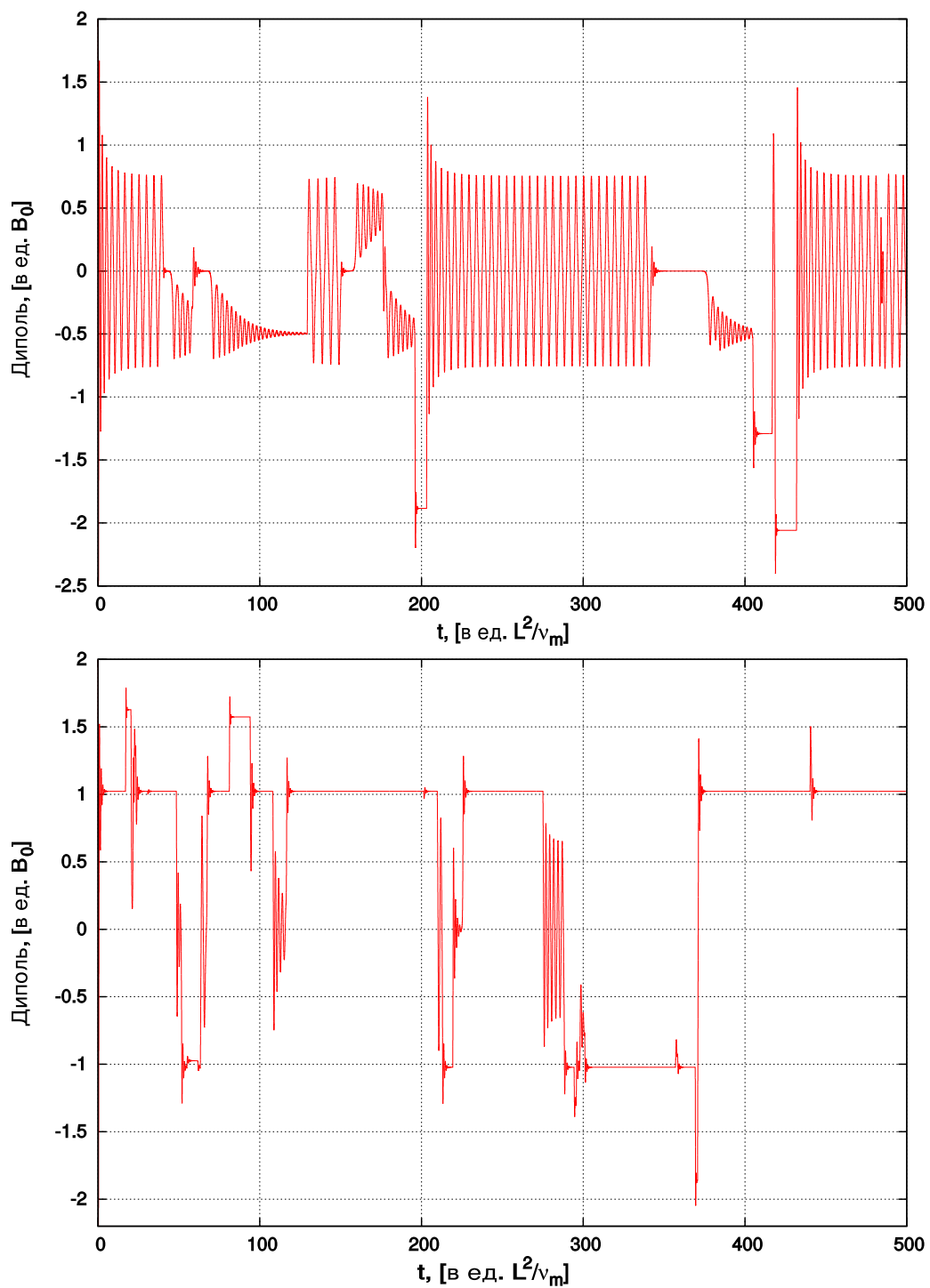


Рис. 2. Режимы изменения амплитуды диполя. Наверху: $(Re_m, R_\alpha) = (42.2, 5.5)$. Внизу: $(Re_m, R_\alpha) = (42.2, 5.7)$.

Здесь есть определенная аналогия с минимумом Маундера, сбой в работе динамо-машины.

Решение в нижней части рис. 2 характеризуется крайне нерегулярными инверсиями, что типично для геодинамо.

Итак, в предложенной простой модели динамо при близких значениях управляющих параметров удается воспроизвести различные режимы динамо, которые наблюдаются в реальных динамо-системах.

Источником регулярных инверсий в модели служит ее внутренняя динамика, а нарушение этой цикличности, сбой в работе динамо-машины, выход на режим хаотических инверсий обусловлены перестройкой структуры турбулентности.

Простота этой модели позволяет легко модифицировать ее для различных небесных тел. Так, в зависимости от величины аспектного отношения можно адаптировать ее к планетам земного типа, гигантским планетам, полностью конвективным звездам, звездам с тонкой конвективной оболочкой. При этом будут меняться параметры мод скорости, что, возможно, изменит набор магнитных мод или их количество. Знания физических параметров конкретного небесного тела при этом не требуется.

Литература

- [1] Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. – London: Academic Press, 1996.
- [2] Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. – М.: БИНОМ, 2009.
- [3] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of Geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core // Magnetohydrodynamics. – 2016. – Vol. 52. – pp. 287–300.
- [4] Соколов Д. Д., Нефедов С.Н. Маломодовое приближение в задаче звездного динамо // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8. – С. 195–204.