

4. Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. – Л.: Недра, 1965. 759 с.
5. Диткин, В.А., Прудников, А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. 455 с.
6. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Обобщенная одномерная модель массопереноса радона (^{222}Rn) и его эксхалация в приземный слой атмосферы // Математическое моделирование, 2007. № 11. Т. 19. С. 43–50.
7. Паровик Р.И., Шевцов Б.М. Моделирование процесса массопереноса радона (^{222}Rn) из фрактальной среды в атмосферу // Математическое моделирование, 2009. №8. Т.21. С. 30-36.

О ТРЕХМЕРНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЫ

3D VISCOELASTIC MAXWELL'S MODEL FOR FRACTAL MEDIUM

А.С.Пережогин, Б.М.Шевцов

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
drew72156@yandex.ru

Real materials and medium have and of its structure at different scaling. Model of that materials may be fractal structures. Fractal properties of medium define stress field. Linear reological models of strain-stress state have exponential solution. At present paper 3d reological viscoelastic model for fractal medium is represented. One of mathematical methods for modeling fractal space is fractional differentiation. Viscoelastic Maxwell's model is used Caputo's derivative instead of classical one. Parameter of Caputo's derivate is connected with relaxation of strain field at fractal medium. Maxwell's reological model can be verify by geoacoustic emission intensity, which interconnects with strain-stress state of sedimentary rocks. It gives opportunity to know strain state of medium by means of geoacoustic emission intensity.

В результате геологических процессов в земной коре создается напряженное состояние. В качестве источников напряжений могут выступать сосредоточенные силы в области готовящегося сейсмического события. Предполагаем, что созданное поле напряжений с течением времени начинает ослабевать за счет сдвиговых источников. Если деформации созданы за более короткий промежуток по сравнению с релаксационными процессам горных пород, то в качестве реологической модели можно использовать модель тела Максвелла. В трехмерном случае вязкоупругая модель Максвелла имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &= \frac{\sigma_1(t) - \nu(\sigma_2(t) + \sigma_3(t))}{E} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_1 - p), \\ \varepsilon_2(t) &= \frac{\sigma_2(t) - \nu(\sigma_1(t) + \sigma_3(t))}{E} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_2 - p), \\ \varepsilon_3(t) &= \frac{\sigma_3(t) - \nu(\sigma_2(t) + \sigma_1(t))}{E} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_3 - p),\end{aligned}\quad (1)$$

где ε_i, σ_i - деформации и напряжения, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, μ - вязкость сдвига, дифференцирование по переменной t обозначается точкой.

Для системы (1) решение для поля напряжений получаем при постоянной левой части. Далее необходимо подставить решение модели для главных напряжений с начальными напряжениями $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$ в диссипативную функцию R [2]:

$$R = \mu \sum_{i=1}^3 \left(v_i - \frac{1}{3} \bar{v} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \bar{v}^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i - p)^2}{4\mu} + \frac{p^2}{2\zeta},$$

где μ и ζ – вязкости сдвига и сжатия среды, v_1, v_2, v_3 – главные значения тензора скорости деформаций, $\bar{v} = (v_1 + v_2 + v_3)/3$. При условии, что вязкие деформации сжатия не рассматриваются, то в функции R будет иметь вид:

$$R = \frac{1}{6\mu} (\sigma_1^{02} + \sigma_2^{02} + \sigma_3^{02} - \sigma_1^0 \sigma_2^0 - \sigma_2^0 \sigma_3^0 - \sigma_3^0 \sigma_1^0) \exp\left(-\frac{Et}{\mu(1+\nu)}\right).$$

Если рассматривается среда, обладающая памятью, то оператор дифференцирования заменяется оператором дробного дифференцирования. В силу конечности напряжений и деформаций подставим вместо классической производной оператор дробного дифференцирования по Капуто [4] в трехмерную модель тела Максвелла (1).

$$\begin{aligned} \partial_{ot}^\alpha \varepsilon_1(t) &= \frac{\partial_{ot}^\alpha \sigma_1(t) - \nu(\partial_{ot}^\alpha \sigma_2(t) + \partial_{ot}^\alpha \sigma_3(t))}{E} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_1 - p), \\ \partial_{ot}^\alpha \varepsilon_2(t) &= \frac{\partial_{ot}^\alpha \sigma_2(t) - \nu(\partial_{ot}^\alpha \sigma_1(t) + \partial_{ot}^\alpha \sigma_3(t))}{E} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_2 - p), \\ \partial_{ot}^\alpha \varepsilon_3(t) &= \frac{\partial_{ot}^\alpha \sigma_3(t) - \nu(\partial_{ot}^\alpha \sigma_2(t) + \partial_{ot}^\alpha \sigma_1(t))}{E} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_3 - p), \end{aligned} \quad (2)$$

где ∂_{ot}^α - оператор дробного дифференцирования по Капуто [5]. Предполагаем, как и в классической вязкоупругой модели Максвелла, что деформации $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ постоянны в течение всего времени и равны $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0$. В начальный момент времени $t = 0$ напряжения $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t)$ равны $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$.

Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнения с дробной производной по Капуто (2) при постоянных деформация и начальных напряжениях дает выражение для диссипативной функции:

$$R_\alpha = \frac{1}{6\mu} (\sigma_1^{02} + \sigma_2^{02} + \sigma_3^{02} - \sigma_1^0 \sigma_2^0 - \sigma_2^0 \sigma_3^0 - \sigma_3^0 \sigma_1^0) \left[E_{1/\alpha} \left(-\frac{Et^\alpha}{2\mu(1+\nu)}, 1 \right) \right]^2,$$

где $E_{1/\alpha}(z, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ - функция Миттаг-Леффлера.

В вязкоупругих породах плотность мощности акустического излучения пропорциональна диссипативной функции R , поскольку именно эта величина отвечает за диссипацию упругой энергии. Если среда обладает памятью, примером такой среды может служить фрактальная геологическая структура, то плотность мощности акустического излучения будет пропорциональна R_α . И в таком случае фрактальные свойства среды в рамках данной модели могут быть определены по экспериментальным данным акустической эмиссии, которая определяется полем упругих напряжений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Полученное аналитическое выражение для диссипативной функции может быть использовано при сопоставлении с интенсивностью акустической эмиссии при деформировании наблюдаемого объекта. В случае учета фрактальных свойств среды решения будут отличаться от классического решения в сторону увеличения длительности процесса во времени. Полученные закономерности диссипативных процессов могут наблюдаться в экспериментах акустических наблюдений в лабораторных или природных условиях.

Литература

1. Тёркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Ч. 2. М.: Мир, 1985. 360 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VII. М.: Наука, 1987. 177 с.
3. К. Аки, П. Ричардс Количественная сейсмология: Теория и методы. Том 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
4. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.
5. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.