# МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА РАДОНА (<sup>222</sup>Rn) В ПРИЗЕМНУЮ АТМОСФЕРУ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ КАК ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ОТ ВЫСОТЫ

## MODEL FOR MASS TRANSFER OF RADON (<sup>222</sup>Rn) INTO THE SURFACE LAYER OF THE ATMOSPHERE WITH COEFFICIENT OF TURBULENT DIFFUSION AS LINEAR FUNCTION FROM HEIGHT

Р.И. Паровик<sup>1</sup>, И.А. Ильин<sup>2</sup>, П.П. Фирстов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, <sup>2</sup>Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, <sup>3</sup>Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН

The paper presents a generalized one-dimensional model for mass transfer of radon 222Rn emanation from alluvium deposits into the surface layer of the atmosphere depending on coefficient of turbulent diffusion as linear function from height. Analytical and the numerical solutions for this model, curves of distribution of radon-emanation concentration in the top part of alluvium deposits and in the surface layer of the atmosphere were constructed.

#### Введение

Моделированием процессов массопереноса радона занимаются сравнительно давно. Актуальность таких исследований возникла еще в начале XX века и была связана с поиском радиоактивных руд [1]. Первые модели массопереноса радона были выдвинуты еще Рэлеем, но в связи со всплеском работ в последние десятилетия в приложениях математической физики данное направление получило стремительное развитие.

Особенно широкое развитие в этом направлении наблюдается в сейсмологии. С целью поиска предвестников сильных землетрясений южной Камчатки на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне в течение последних десяти лет в функционируют сеть станций мониторинга объемной активности (OA Rn) [7,8]: Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН (ИВИС ДВО РАН) и Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (ИКИР ДВО РАН). Мониторинг OA Rn позволит выявить скрытые закономерности распределения радона в данном регионе и позволит понять связь между напряженностью электрического поля, геоакустической эмиссией и сейсмическими событиями на Камчатке.

В данной работе рассмотрена модель распределения концентрации радона из грунта на дневную поверхность с учетом коэффициента турбулентной диффузии как линейной функции от высоты. В работе также проводится анализ точных и численных решений представленной модели. Работа имеет теоретическое значение результаты, которого могут быть использованы для выявления закономерностей в наблюдаемом процессе, обработки экспериментальных данных и в решении обратных задач.

Модель массопереноса радона в приземный слой атмосферы с учетом зависимости коэффициента турбулентной диффузии от высоты по линейному закону.

Приземный слой атмосферы – небольшой слой атмосферы высотой порядка 10-100 метров и толщиной пограничного слоя порядка 1 километра, в котором коэффициент турбулентной диффузии растет при любых условиях с высотой. Приземный слой атмосферы образуется при взаимодействии горизонтального ветра с подстилающей земной поверхностью. Гидродинамические течения, которые образуются при таком взаимодействии, обычно характеризуются большими числами Рейнольдса. Такие течения в дальнейшем переходят в турбулентное состояние, поэтому говорят о турбулентном приземном слое. Наличие турбулентного перемешивания приводит к изменению электрического состояния в нижних слоях атмосферы [9, 10]: меняются распределения электрической проводимости, электрического поля, плотности электрического тока и электрического заряда. В приземной атмосфере данный процесс может порождать турбулентный электродный эффект [2], суть которого заключается в помещении электрода в ионизированную среду, которая приводит к зависимости электрических характеристик от расстояния до поверхности электрода вблизи него. В атмосферном электричестве электродом считают поверхность земли, а радон выступает в роли естественного ионизатора.

В свою очередь, напряженность электрического поля атмосферы является индикатором на сейсмические события [9]. Поэтому задача о нахождении распределения концентрации аэроионов, в нашем случае радона, в приземной атмосфере наиболее актуальна для данного региона.

В работах [4, 5] рассматривалась модель массопереноса радона в приземную атмосферу с постоянным коэффициентом диффузии. В реальных условиях значения коэффициента турбулентной диффузии колеблются в зависимости от скорости ветра, шероховатости земной поверхности, термической устойчивости, высоты [3]. Поэтому для простоты будем полагать, что коэффициент турбулентной диффузии зависит только от высоты *z*.

Рассмотрим задачу о массопереносе радона в приземный слой атмосферы под действием диффузии с краевыми условиями:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 N_1(z,t)}{\partial z^2} - I h N_1(z,t) - h \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial t} + Q = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( A(z) \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial z} \right) - I N_2(z,t) = 0 \end{cases}$$

$$(1)$$

$$I. \quad z = 0 \quad N_1(0,t) = N_2(0,t), h D \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial z} \bigg|_{z=0} = A \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial z} \bigg|_{z=0}$$

$$2. \quad z \to +\infty \quad N_1(+\infty,t) = 0, z \to -\infty \quad N_2(-\infty,t) = N_{\infty}$$

$$3. \quad t = 0 \quad N_1(z,0) = N_{\infty}$$

Во втором уравнении системы (1) коэффициент турбулентной диффузии зависит от пространственной координаты *z*. Вид зависимости данного коэффициента можно определить эмпирически. Коэффициент турбулентной диффузии также можно попытаться восстановить, решая соответствующую обратную задачу при наличии необходимых экспериментальных данных.

Так как на данном этапе работы нам не известны эмпирические параметры в связи с отсутствием соответствующего эксперимента, то мы ограничиваемся линейным законом распределения концентрации радона в приземном слое атмосферы в зависимости от высоты. Данная возможность была предложена еще немецким ученым Прандтлем [3] и поэтому заслуживает внимательного рассмотрения и для задачи (1).

В приземном слое атмосферы будем считать коэффициент турбулентной диффузии, зависящей от высоты по следующему закону: A(z) = A+bz, где A-коэффициент турбулентной диффузии в приземной атмосфере, а параметр b имеет смысл скорости роста турбулентной диффузии с высотой. Решения системы уравнений (1) запишутся в виде:

$$N_{1}(z,t) = N_{\infty}\left(1 - \frac{j \cdot e^{-SZ}}{(j-r)}\right), N_{2}(z,t) = \frac{N_{\infty}r \cdot e^{\frac{2(q-j)}{b}}}{r-j}$$
(2)

Здесь для простоты положили:

$$\frac{\sqrt{h^2 + 4lhD} - h}{2D} = s, \frac{h^2 - h\sqrt{h^2 + 4lhD}}{2} = r, \frac{2\sqrt{lA}}{b} = x, j = \sqrt{lA}, q = \sqrt{l(A+bz)}$$

Данные решения (2) описывают распределение концентрации радона в грунте и в приземном слое атмосферы с коэффициентом турбулентной диффузии как линейной функции от высоты *z*.

## Численный анализ модели массопереноса радона в приземный слой атмосферы с учетом зависимости коэффициента турбулентной диффузии от высоты по линейному закону

В реальных условиях в большинстве случаев невозможно точными методами найти решения задачи, когда ее параметры непостоянны. В таких случаях задействуют численные методы для решения поставленной задачи. Численный анализ дает возможность получить алгоритм решения, который можно будет реализовать на ЭВМ. В данной работе численные решения были получены конечноразностными методами [6]. В численном моделировании мы использовали равномерную по времени и пространству разностную сетку, по которой строили трехточечную неявную разностную схему второго порядка точности. Неявная разностная схема эквивалентна алгебраической системе уравнений, которая имеет трехдиагональный вид. Такие системы проще всего решать методом прогонки [6] с некоторыми условиями устойчивости для прогоночных формул. Устойчивость численных решений проверялась методом малых возмущений исходных данных. Данный метод показал, что малые изменения исходных данных влекут малые изменения численных решений.

Используем разностную схему, сводим задачу (1) к алгебраической системе с краевыми условиями вида:

$$\begin{cases} Hu_{N-1}^{k+1} - Ku_{N}^{k+1} + Lu_{N+1}^{k+1} = 0 \\ Mu_{i-1}^{k+1} - Pu_{i}^{k+1} + M \cdot u_{i+1}^{k+1} = f_{i}^{k}, i = 0, 1, ..., M - 1, M, M + 1, ..., N - 1; k = 0, 1, ..., L \\ K = 2(A + bih) + bh + h^{2}I, H = a + bhi, L = H + bh. \end{cases}$$
(3)

Устойчивость прогоночных формул выражается условиями:  $_{K>0,L>0,H>0,P>2M,K>H+L}$ . Вид решения задачи (3) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{N}^{k+1} &= p_{N} u_{N+1}^{k+1} + q_{N}, p_{N} = \frac{-L}{Hp_{N-1} - K}, q_{N} = \frac{-Hq_{N-1}}{Hp_{N-1} - K} \\ u_{M}^{k+1} &= p_{M} u_{M+1}^{k+1} + q_{M}, p_{M} = \frac{-A}{hD(p_{i} - 1) - A}, q_{M} = \frac{hDq_{i}}{hD(p_{i} - 1) - A} \\ u_{i}^{k+1} &= p_{i} u_{i+1}^{k+1} + q_{i}, p_{i} = \frac{M}{P - Mp_{i-1}}, q_{i} = \frac{f_{i}^{k} + Mq_{i-1}}{P - Mp_{i-1}} \\ q_{0} &= j_{0}, p_{0} = 0, i = 0, 1, ..., M - 1, M, M + 1, ..., N - 1; k = 0, 1, ..., L \end{aligned}$$

$$(4)$$

# Анализ решений и графическая визуализация процессов массопереноса радона в приземный слой атмосферы

Сетка строилась следующим образом: шаг по временной и пространственной координате принимался равномерным, причем по пространству бралось 20 точек, а по времени две точки. Шаг по пространству составлял h = 100 см, по времени t = 3600 с.

Для реализации численного алгоритма с учетом условий на прогоночные формулы принимались следующие параметры: коэффициент диффузии в D=5×10<sup>-4</sup> cM<sup>2</sup>/c и коэффициент пористости h = 0.25 для элювиально-делювиальных слабо увлажненных отложений [4, 5]; фоновая объемная активность радона, N<sub>∞</sub> =10<sup>-2</sup> Бк/см<sup>3</sup> принята согласно наблюдениям в районе Паратунского грабена на Камчатке [7,8]; интенсивность эманирования радона Q=0.00756 Бк/(см<sup>3</sup>·c); постоянная распада радона  $l = 2.1 \times 10^{-6} \text{ c}^{-1}$ ; скорость конвективного переноса v =  $10^{-3}$  см/c; коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере 1000 см<sup>2</sup>/c [4, 5]; время

фиксировалось t = 3600 с. Результат расчетов численных и точных решений, рассмотренных ранее моделей, представлен в таблице [4, 5]. В данной таблице также представлена модель турбулентной диффузии как линейной функции от высоты по закону A(z)=A+bz, (b=2700 см/c). По данным в таблице видно, что значения концентрации радона уменьшаются по мере его переноса к дневной поверхности. В приземной атмосфере происходит резкий спад с высотой концентрации радона за счет турбулентной диффузии. Данный механизм массопереноса радона естественен и заложен в наших моделях. Хочется отметить, что при линейной зависимости коэффициента турбулентной диффузии от высоты значения концентрации радона меньше на порядок в грунте и на поверхности, чем значения концентрации радона при постоянном коэффициенте диффузии. Это можно объяснить тем, что коэффициент турбулентной диффузии линейно возрастает и, как правило, по этой причине на порядок или на порядки снижается концентрация радона в грунте, на поверхности и в приземной атмосфере. Анализ численных и точных решений показывает, что численный метод решения достаточно хорошо аппроксимирует точные решения в грунте. В приземной атмосфере значения при численном решении несколько больше, чем значения при точном решении. Это связано с точностью численного алгоритма.

Таблица. Расчет изменения с глубиной OA Rn относительно рыхлых отложений для диффузионной и диффузионно-конвективной и с непостоянным коэффициентом турбулентной диффузии моделей.

	N <sub>Rn</sub> /N <sub>Rn</sub> <sub>∞</sub>					
Приземный слой атмосферы	Диффузия А(z)=А		Диффузия + конвекция A(z)=A		Диффузия + турбулентность A(z)=A+bz b=2700 см/с	
	численное решение k=1	точное решение k=1	численное решение k=1	точное решение k=1	численное решение k=1	точное решение k=1
	0	0	0	0	0	0
	$0.3 \cdot 10^{-7}$	$5.34 \cdot 10^{-4}$	$0.4 \cdot 10^{-7}$	$2.38 \cdot 10^{-4}$	$0.21 \cdot 10^{-8}$	$0.56736627 \cdot 10^{-8}$
	$0.7 \cdot 10^{-7}$	$5.37 \cdot 10^{-4}$	$0.8 \cdot 10^{-7}$	$2.39 \cdot 10^{-4}$	$0.23 \cdot 10^{-8}$	0.56736630·10 <sup>-8</sup>
	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$5.39 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$	$0.25 \cdot 10^{-8}$	$0.56736635 \cdot 10^{-8}$
	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$5.41 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$2.41 \cdot 10^{-4}$	$0.28 \cdot 10^{-8}$	$0.56736638 \cdot 10^{-8}$
	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$5.44 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$	$0.30 \cdot 10^{-8}$	$0.56736640 \cdot 10^{-8}$
	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$5.46 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$0.33 \cdot 10^{-8}$	$0.56736643 \cdot 10^{-8}$
	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$5.49 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	$0.36 \cdot 10^{-8}$	$0.56736645 \cdot 10^{-8}$
	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$5.51 \cdot 10^{-4}$	3.3.10-7	$2.45 \cdot 10^{-4}$	$0.40 \cdot 10^{-8}$	$0.56736648 \cdot 10^{-8}$
Граница	<b>3.4·10</b> <sup>-7</sup>	5.77·10 <sup>-4</sup>	<b>3.7·10</b> <sup>-7</sup>	1.35·10 <sup>-4</sup>	0.44·10 <sup>-8</sup>	0.57·10 <sup>-8</sup>
Грунт	0.311	0.209	0.332	0.267	0.018	0.020
	0.525	0.403	0.554	0.481	0.039	0.041
	0.673	0.572	0.703	0.645	0.057	0.061
	0.776	0.709	0.802	0.768	0.083	0.080
	0.847	0.813	0.869	0.856	0.098	0.099
	0.898	0.886	0.915	0.914	0.116	0.118
	0.933	0.935	0.946	0.952	0.131	0.136
	0.960	0.965	0.969	0.974	0.150	0.154
	0.981	0.982	0.985	0.987	0.176	0.172

Для более наглядного представления процесса массопереноса радона на дневную поверхность под действием диффузии с линейной зависимостью турбулентной диффузии от высоты был построен отдельный график численного и точного решения, а также различные реализации кривых концентраций при различных параметрах b. По рис.1. видно, что процесс массопереноса радона имеет линейный характер: концентрация уменьшается непрерывно по мере переноса радона к земной поверхности. На рис.2. показаны изменения значений концентрации радона в приземной атмосфере в зависимости от скорости b. Данные кривые полтверждают тот факт, что при росте коэффициента турбулентной диффузии концентрация непрерывно падает с высотой.



приземную атмосферу радона в коэффициентом турбулентной диффузии A(z)=A+bz:1 – точное решение, 2 численное решение.



 $b=2700 \text{ cm}^2/\text{c}, 2-b=3000 \text{ cm}^2/\text{c}, 3-b=3300 \text{ cm}^2$ 

### Список литературы

1. Граммаков А.Г. Эманационный метод поисков, исследования и разведки радиоактивных объектов. – Л. : 1934. – 115 с. (Тр. ЦНИГРИ: Вып.7).

 $/c, 4-b=3600 \text{ cm}^2/c$ 

- 2. Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М., Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог : ТРГУ, 1998. – 122 с.
- 3. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л. : Гидрометеоиздат, 1976. – 639 c.
- 4. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Математическая диффузионная модель массопереноса радона (OA<sup>222</sup>Rn) в грунте и его эксхаляции в приземном слое атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле, 2006 № 1. (вып.7). С. 110-114.
- 5. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Модель массопереноса радона (OA <sup>222</sup>Rn) в приземном слое атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле, 2006 № 2. (вып.8). C. 128-133.
- 6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 550 с.
- 7. Фирстов П.П. Мониторинг объемной активности подпочвенного радона (<sup>222</sup>Rn) на Паратунской гидротермальной системе в 1997-1998 г.г. с целью поиска предвестников сильных землетрясений Камчатки // Вулканология и сейсмология. 1999. № 6. С. 33-43.
- 8. Фирстов П.П., Рудаков В.П. Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997-2000 г.г. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Вулканология и сейсмология. 2003. № 1. С. 33-43.
- 9. Фирстов П.П., Пономарев Е.А, Чернева Н.В., Бузевич А.В. Подпочвенный радон и градиент потенциала атмосферного электрического поля в районе Петропавловск-Камчатского геодинамического полигона в 1998-2005 г.г. (Камчатка) // Вестник КРАУНЦ. Серия науки о Земле, 2006. № 1. (вып.7.). С. 102-109.
- 10. Челмерс Дж. А. Атмосферное электричество. М. : Мир, 1974. 419 с.