

МОДЕЛЬ КОНВЕКЦИИ В ШАРОВОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ

Водинчар Г.М., Шевцов Б.М.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

The model of convection in a spherical layer of the viscous liquid rotating with constant angular speed is constructed. The field of temperatures is presented by a combination of eigen functions of Laplas operator in a layer. The field of speed is spread out on toroidal and poloidal components. The dynamic system for amplitudes of temperature and speed is received.

Проблема генерации магнитного поля Земли является одной из основных задач геофизики. Механизм, который объяснял бы все наблюдаемые вариации поля, в настоящее время не известен. Наиболее распространенной является теория гидромагнитного динамо, восходящая к работам Лармора, Эльзассера, Булларда. Однако в этой теории разработаны лишь кинематические модели, когда распределение скоростей предполагается заданным. Проблемы динамики и энергетики практически не разработаны [1]. В настоящей работе предпринята попытка построения модели динамики жидкости во внешнем ядре, без учета электрических токов.

Вывод уравнений модели.

Для описания конвекции используем приближение Буссинеска [2]. Модель включает уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = n \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{r_0} \nabla P - \mathbf{b} \cdot T \cdot \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad (1)$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot T = k \cdot \Delta T \quad (2)$$

и уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

Здесь n - кинематическая вязкость, r_0 - среднее в слое давление, \mathbf{b} - коэффициент объемного расширения, k - коэффициент температуропроводности, \mathbf{g} - ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость. Поля давления P и температуры T представляют собой отклонения от средних значений, соответствующих гидростатическому равновесию.

Система уравнений дополняется краевыми условиями для температуры и условиями непроницаемости для скорости:

$$T|_{r=r_1} = T_1, \quad T|_{r=r_2} = T_2, \quad v_r|_{r=r_1} = v_r|_{r=r_2} = 0 \quad (4)$$

Система (1)-(4) образует модель конвекции.

Выполним обезразмеривание, используя в качестве характерных масштабов по длине – толщину слоя h , по температуре – температурный градиент на границах слоя dT . Получим безразмерную модель

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v} - \nabla P + G \cdot T \cdot \mathbf{e}_r - a \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot T = \frac{1}{S} \cdot \Delta T \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ T|_{r=r_1} = T_1, \quad T|_{r=r_2} = T_1 - 1, \quad v_r|_{r=r_1} = v_r|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Для ядра $r_1 = 0,664$, $r_2 = 1,664$. Здесь $G = \frac{d\Gamma gh^3 b}{n^2}$ – число Грассхофа, $S = n/k$ – число Прандтля, $a = \frac{2wh^2}{n}$.

По аналогии с двумерной моделью конвекции Лоренца [3], выполним в системе (5) для поля T переход к отклонению температуры \tilde{T} от линейного по радиусу профилю $T = -r + r_1 + T_1 + \tilde{T}$ и получим систему (тильда опущена) с однородными краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v} - \nabla P + G \cdot (-r + r_1 + T_1 + T) \cdot \mathbf{e}_r - a \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot T - v_r = \frac{1}{S} \cdot \left(-\frac{2}{r} + \Delta T \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ T|_{r=r_1} = T|_{r=r_2} = 0, \quad v_r|_{r=r_1} = v_r|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Для того, чтобы удалить из модели поле давления, возьмем ротор первого уравнения и получим окончательную систему

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}) = \nabla \times \Delta \mathbf{v} + G \cdot \nabla \times (T \mathbf{e}_r) - a \cdot \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot T - v_r = \frac{1}{S} \cdot \left(-\frac{2}{r} + \Delta T \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ T|_{r=r_1} = T|_{r=r_2} = 0, \quad v_r|_{r=r_1} = v_r|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Поле температуры будем раскладывать по системе собственных функций оператора Лапласа в слое. Поле скоростей разложим на тороидальные и полоидальные моды, где в качестве производящих функций также будем использовать собственные функции оператора Лапласа.

Собственные функции оператора Лапласа в слое.

Найдем собственные функции оператора Лапласа, т.е. решения задачи краевой задачи $\begin{cases} \Delta T + mT = 0 \\ T|_{r=r_1} = T|_{r=r_2} = 0 \end{cases}$. Разделяя переменные в уравнении, получим собственные

функции в виде $T_{kn}^m = R_{kn}(r) Y_n^m(q, j)$, где $Y_n^m(q, j)$ – сферические функции, а $R_{kn}(r) = A \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{m}r)}{\sqrt{r}} + B \frac{J_{n-1/2}(\sqrt{m}r)}{\sqrt{r}}$ [4]. Здесь J – функции Бесселя первого рода.

Использование краевых условий дает уравнение на собственные значения $J_{n+1/2}(\sqrt{m}r_1) \cdot J_{n-1/2}(\sqrt{m}r_2) - J_{n+1/2}(\sqrt{m}r_2) \cdot J_{n-1/2}(\sqrt{m}r_1) = 0$. Это трансцендентное уравнение допускает аналитическое решение лишь при $n=0$. Для каждого n уравнение имеет счетное семейство положительных решений m_{kn} .

Таким образом, возникает система функций $R_{kn}(r) = A_{kn} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\sqrt{m_{kn}}r) + B_{kn} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n-1/2}(\sqrt{m_{kn}}r)$, где $A_{kn} = J_{n-1/2}(\sqrt{m_{kn}}r_1)$ и

$B_{kn} = -J_{n+1/2}(\sqrt{m_{kn}} r_1)$. Эти функции ортогональны при фиксированном n и различных k на отрезке $[r_1; r_2]$ с весом r^2 . Характерная структура функций представлена на рис. 1. Индекс k равен количеству нулевых узлов.

Далее, коэффициенты A_{kn} и B_{kn} домножаем на нормирующий коэффициент и получаем систему нормированных функций.

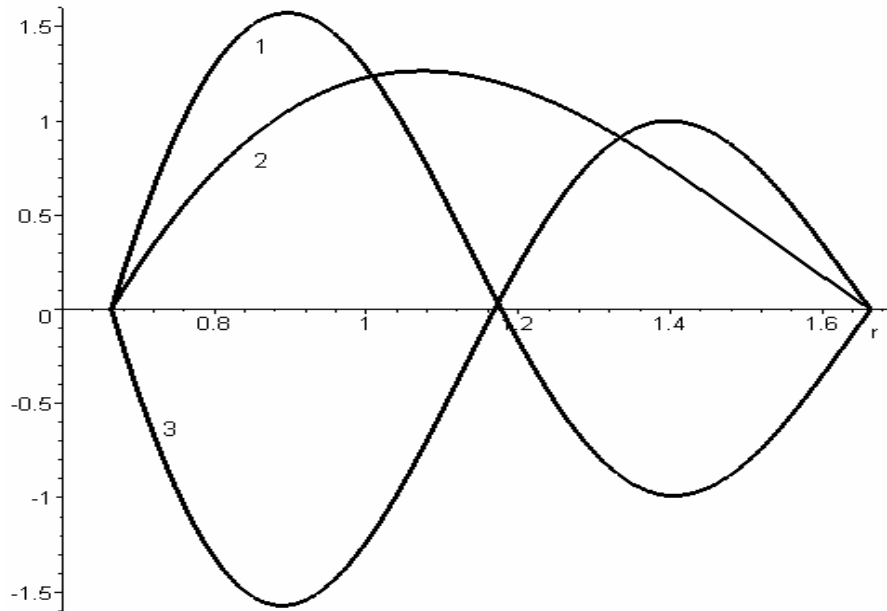


Рис. 1. Радиальные компоненты собственных функций 1 – (n=2, k=1); 2 – (n=0, k=0); 3 – (n=1, k=1).

Так как собственные значения m_{kn} при ненулевых n можно определить только численно, сами коэффициенты A_{kn} и B_{kn} функций $R_{kn}(r)$ можно найти приближенно. Для низших мод коэффициенты функций и собственные значения с точностью 10^{-19} приведены в таблице 1.

Таблица 1.

k	n	m_{kn}	A_{kn}	B_{kn}
0	0	p^2	-0.5479485964309416876	-2.7337628909429647612
0	1	11.4550331341427498641	-1.4509212916873424298	-2.8171528277350989696
0	2	14.5726383976473466062	2.7723411649155921777	-1.6647410625853884214
1	0	$4p^2$	-2.2855946273519994979	3.8098905498187729154
1	1	41.2197542680730133671	4.3403160639773456066	-0.9656930125642802201
1	2	44.7091850015094186573	-1.7360014362064302505	-4.1020338556147590522

Разложение полей.

В разложениях полей будем для упрощения записи использовать одноиндексные обозначения. Представим поле скоростей в виде $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N a_i(t) \mathbf{v}_i$. Здесь \mathbf{v}_i - поля вида $\mathbf{rot}(R_{kn} Y_n^m \mathbf{e}_r)$ (тороидальные компоненты) и/или $\mathbf{rot rot}(R_{kn} Y_n^m \mathbf{e}_r)$ (полоидальные компоненты). Поскольку радиальная составляющая \mathbf{v}_i равна 0 в тороидальном случае и

равна $-\frac{R_{kn}}{r^2} \left(\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial q^2} + ctg q \frac{\partial Y_n^m}{\partial q} + \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial j^2} \right)$ для полоидальных компонент, то граничное условие для скорости выполняется автоматически. Выполняется и уравнение неразрывности.

Поле температуры представим в виде $T = \sum_{j=1}^M b_j(t) T_j$, где T_j - поля вида $R_{kn} Y_n^m$.

Граничные условия для температуры также выполнены.

Подставив разложения в первое уравнение системы (7) получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{da_i}{dt} + \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \nabla \times ((\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^N a_i \nabla \times \Delta \mathbf{v}_i + G \sum_{j=1}^M b_j \nabla \times (T_j \mathbf{e}_r) - a \sum_{i=1}^N a_i \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i)$$

Домножим полученное уравнение скалярно на $\nabla \times \mathbf{v}_k$ и проинтегрируем по слою. В результате получится система уравнений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^N A_i^k \frac{da_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^N B_{ij}^k a_i a_j + \sum_{i=1}^N C_i^k a_i + G \sum_{j=1}^M D_j^k b_j + a \sum_{i=1}^N E_i^k a_i \quad k = 1 \dots N \quad (8)$$

Здесь $A_i^k = \int (\nabla \times \mathbf{v}_k) (\nabla \times \mathbf{v}_i) dV$, $B_{ij}^k = -\int (\nabla \times \mathbf{v}_k) (\nabla \times ((\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}_j)) dV$, $C_i^k = \int (\nabla \times \mathbf{v}_k) (\nabla \times \Delta \mathbf{v}_i) dV$, $D_j^k = \int (\nabla \times \mathbf{v}_k) (\nabla \times T_j \mathbf{e}_r) dV$, $E_i^k = -\int (\nabla \times \mathbf{v}_k) (\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i)) dV$.

Все эти интегралы несложно могут быть вычислены, причем интегрирование по q и j проводится аналитически, а по r - численно.

Можно показать, что система полей $\nabla \times \mathbf{v}_k$ относительно интегрирования по слою почти ортогональна: ортогональны роторы любой полоидальной и любой тороидальной компоненты, ортогональны и однотипные компоненты отличающиеся какими-либо индексами сферических функций. Поэтому матрица \mathbf{A} в системе (8) почти диагональная и легко обратима. Умножая на обратную матрицу, получим динамическую систему для амплитуд компонент скорости

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^N \bar{B}_{ij}^k a_i a_j + \sum_{i=1}^N \bar{C}_i^k a_i + G \sum_{j=1}^M \bar{D}_j^k b_j + a \sum_{i=1}^N \bar{E}_i^k a_i \quad k = 1 \dots N \quad (9)$$

Аналогичным образом поступим со вторым уравнением системы (7). Подставив разложение для скорости и температуры, домножив почленно на T_s и проинтегрировав по слою, получим систему

$$\frac{db_s}{dt} = \sum_{i,j=1}^{N,M} F_{ij}^s a_i b_j + \sum_{i=1}^N H_i^s a_i + \frac{1}{S} (I_s + m_s b_s) \quad s = 1 \dots M \quad (10)$$

Здесь $F_{ij}^s = -\|T_s\|^{-2} \int T_s (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) T_j dV$, $H_i^s = \|T_s\|^{-2} \int T_s v_{ir} dV$, $I_s = -\|T_s\|^{-2} \int \frac{2T_s}{r} dV$.

В результате получается объединенная система для амплитуд искомым полей

$$\begin{cases} \frac{da_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^N \bar{B}_{ij}^k a_i a_j + \sum_{i=1}^N \bar{C}_i^k a_i + G \sum_{j=1}^M \bar{D}_j^k b_j + a \sum_{i=1}^N \bar{E}_i^k a_i & k = 1 \dots N \\ \frac{db_s}{dt} = \sum_{i,j=1}^{N,M} F_{ij}^s a_i b_j + \sum_{i=1}^N H_i^s a_i + \frac{1}{S} (I_s + m_s b_s) & s = 1 \dots M \end{cases}$$

Выводы.

В работе получена модель конвекции во вращающемся слое вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Эта модель может быть использована для описания конвекции во внешнем ядре Земли в пренебрежении силы Лоренца. Гидродинамические токи разложены на полоидальные и тороидальные компоненты, что позволяет осуществлять

селекцию мод. Получена динамическая система для амплитуд компонент скорости и температуры. Эта система является аналогом классической системы Лоренца [3] маломодовой конвекции, и, как представляется авторам, позволит в дальнейшем исследовать различные режимы конвекции в ядре.

Список литературы

1. Джекобс Дж. Земное ядро. – М. : Мир, 1979.
2. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоздат, 1988.
3. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.