ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ МГД-УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА

APPLICATION OF VARIATION METHODS OF NONEQUILIBRIUM THERMODYNAMICS TO OBTAIN A DISSIPATIVE SYSTEM OF MGD-EQUATIONS IN APPROXIMATION OF LEADING CENTER

В.В. Богданов

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

The questions on the principles of the least dispersion of Onsager's energy and the least production of Prigogin's entropy, uniting by Dyarmati, to one variational principle are considered in this research. This method of the approach allows us to receive a theoretical model (the hydrodynamical system of equations) which describes the dynamics of collisionless plasma which is near equilirium state in drift approximation. This system of equations is full self-accorded and in contrast to Vlasov's equation and following from it (or postulated on the basis of known laws) the equations of hydrodynamics besides takes into consideration the fluctuational interaction of local currents with electric and magnetic fields in the limits of the exactness of approximation drift. The calculation of fluctuations is ensured by the introduction to the expression for the pressure of additional member responsible for its non-equilibrium part that is analogously to postulating of Langevin source by description of Brown particles in hydrodynamics. On the basis of energy conservation law of a charged particle in drift approximation a constitutive equation for parallel component of pressure tensor with zero right member was obtained. Considering it and an additional dissipative member in motion equation the obtained fluctuation-dissipative system advantageously differs from invertible approximation of Chew, Goldberger, Low.

Известно, что электромагнитные явления в плазме значительно проще описывать на языке полей, выражая электрический ток через ротор магнитного поля (уравнение Максвелла). Но, как отметил Альвен, подход, в котором игнорируется корпускулярный аспект электрического тока, не позволяет в полной мере описывать многие процессы в космической плазме [1]. Действительно, опираясь на понятие непрерывности, невозможно в механике сплошных сред учесть флуктуации гидродинамических функций, формирующихся за счет молекулярной структуры среды. В свою очередь, на гидродинамическом уровне описания учет корпускулярной структуры приводит к уравнению Ланжевена, в котором параметры среды описываются случайными источниками. Эти источники ответственны за флуктуации плотности, скорости, температуры и, являясь неустранимыми свойствами среды, не могут быть исключены. В свою очередь, «бесстолкновительная» модель плазмы, основанная на уравнениях Власова, в принципе не содержит флуктуации, т.к. именно столкновения приводят к флуктуациям и, как следствие, к диссипации. Поэтому для анализа на основе уравнений Власова такого явления как «бесстолкновительное» затухание Ландау, прибегают к двум, вообще говоря, противоположным подходам. В первом, чисто математическом, для устранения возникающих резонансов, в уравнении Власова, линеаризованном относительно малых возмущений, используется способ адиабатического включения поля и выбирается направление обхода по правилу Ландау. Во втором, более физическом подходе, в уравнение Власова вводится малый диссипативный член, определяющий взаимодействие заряженных частиц через некоторую частоту «столкновений». При этом исходное «бездиссипативное» уравнение искусственно «портится». В конечных результатах эта частота устремляется к нулю, и в результате получается аналогичный первому способу коэффициент «бесстолкновительного» затухания Ландау. Поэтому для описания физики бесстолкновительной плазмы, находящейся в сильном магнитном поле, представляет определенный интерес возможность учета дрейфового приближения в уравнении движения. Действительно, являясь одночастичным, т.е. изначально учитывающим корпускулярную структуру, оно одновременно допускает и флуктуации в пределах точности этого приближения $\frac{T_л}{H}\left|\frac{dH}{dt}\right| << 1$, где $T_л$ – период лармором вращения.

С учетом сказанного, ясно, что учет молекулярной структуры сплошной среды должен приводить к возникновению в ней диссипации. В свою очередь, вариационный принцип Дьярмати, объединяющий принципы Онсагера и Пригожина [6], позволяет в рамках Лагранжевого формализма получить уравнение движения с учетом диссипации для замагниченной плазмы (давление анизотропно) в том приближении, в котором записываются термодинамические силы X_i и потоки J_i. В работе [3] на основе дрейфового приближения [4] и приближения двух адиабатических инвариантов Чу, Гольдбергера, Лоу (ЧГЛ) [11] была получена система уравнений, которая учитывает диссипативное взаимодействие дрейфовых токов с электромагнитными полями. В этой системе уравнения состояния для параллельной и перпендикулярных составляющих тензора давления постулируются. Однако на основе уравнения сохранения энергии заряженной частицы в дрейфовом приближении [9] и уравнения неразрывности можно получить уравнение для параллельной составляющей давления с ненулевой правой частью.

Для описания неравновесных термодинамических процессов в сплошных средах в линейном приближении венгерским физиком Дьярмати был сформулирован вариационный принцип, объединяющий принцип наименьшего рассеяния энергии Онсагера и принцип наименьшего производства энтропии Пригожина. Для получения уравнения движения, учитывающего диссипацию, введем, следуя [6], потенциалы рассеяния $\Psi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik}X_iX_k$ и $\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} R_{ik}J_iJ_k$, а так же функцию производства энтропии $s = \sum_{i=1}^{n} J_iX_i$, выраженные через термодинамические силы X_i (градиенты температуры, давления, потенциала, напряженности поля и так далее), и потоки J_i, соответствующие наблюдаемым процессам переноса. Если теперь построить функцию $L = \Psi + \Phi - \sigma$, то, как показано в [6], термодинамические неравновесные процессы вблизи устойчивого состояния развиваются так, что интеграл от L по объему, занимаемому исследуемой средой, минимален

$$\int_U L\,dU = \int_U [\Psi + \Phi - \sigma]dU = \min .$$

В такой формулировке принцип Дьярмати аналогичен принципу Гамильтона в механике и вариация этого интеграла равна нулю. Следуя общим положениям работ [6,7,8] представим тензорное давление положительно заряженных частиц ионизованного газа в виде суммы двух частей. Одна часть $\overleftrightarrow{P}$ зависит от состояния и соответствует равновесной части, другая часть $\overleftrightarrow{P}_d$ – от скорости изменения этого состояния и соответствует неравновесной части, то есть

$$\overleftrightarrow{P}^i_\Sigma = \overleftrightarrow{P}^i + \overleftrightarrow{P}^i_d , \qquad (1)$$

индекс «i» обозначает ионную составляющую равновесной и неравновесной частей тензора давления плазмы. Из общих положений о виде явной зависимости давления $\overleftrightarrow{P}^i_d$ следует, что оно должно зависеть от макроскопической скорости среды $\vec{V}_i$ и от физических причин, вызывающих появление неравновесной части давления (например, для вязких сред с броуновскими частицами это учитывается введением соответствующих коэффициентов вязкости и случайного ланжевеновского источника). В нашем случае вязкость в обычном понимании отсутствует, и неравновесная часть уравнения должна быть пропорциональна потокам заряженных частиц, что также соответствует общей концепции о передаче давления посредством электромагнитного взаимодействия, а также учитывает дискретность ионизованной среды (её атомно-молекулярную структуру [7,8]). При таком подходе ионная составляющая тензора давления $\overleftrightarrow{P}_d^i$ подобна ланжевеновскому источнику. Согласно сказанному, представим неравновесную часть давления в виде

$$\overleftrightarrow{P}_d^i = -m_i(\vec{V}_k^i \cdot \vec{J}_n^i)\overleftrightarrow{I}, \tag{2}$$

где $\overleftrightarrow{I}$ – единичный тензор, а для равновесной части выпишем стандартное представление этой части давления [8]

$$(\overleftrightarrow{P}^i)_{kn} = p_{II}^i \vec{e}_k \vec{e}_n + p_\perp^i(\delta_{kn} - \vec{e}_k \vec{e}_n), \ \vec{e}_1 = \vec{H}/H. \tag{3}$$

В (2) пространственная неоднородность и концентрация n учитывается в явном виде потока $\vec{J}^i$.

Представим принцип Дьярмати в виде [6]

$$\delta\int_U (\sigma_d - \Psi_d)dU = 0, \tag{4}$$

где $\sigma_d = \sum_{j=1}^{f} J_j X_j$ и $\Psi_d = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f} L_{jk} X_j X_k$. Интеграл в (4) берется по всему объему U, занимаемому плазмой. Так как в бесстолкновительной плазме отсутствуют химические реакции и источники гибели и рождения частиц, а взаимодействие токов приводит к диссипативным явлениям, то согласно общим принципам построения σ_d и Ψ_d [6] имеем для положительной компоненты плазмы

$$\sigma_d^i = -\overleftrightarrow{P}_d^i : (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^i), \ \Psi_d^i = \frac{1}{2} m_i(\vec{V}^i \cdot \vec{J}^i)(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_i) = -\frac{1}{2}\overleftrightarrow{P}_d^i : (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^i)$$

С учетом значений σ_d и Ψ_d на основе (4) получаем

$$\delta\int_U \left(-\overleftrightarrow{P}_d^i : \vec{\nabla}\vec{V}^i + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{P}_d^i : \vec{\nabla}\vec{V}^i \right) dU = -\frac{1}{2}\delta\int_U \overleftrightarrow{P}_d^i : (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^i)dU = 0 \tag{5}$$

Для вычисления подинтегрального выражения воспользуемся уравнением баланса поступательной кинетической энергии [6]

$$\rho_i \frac{d}{dt}\frac{(\vec{V}^i \vec{V}^i)}{2} + \vec{\nabla} \cdot (\overleftrightarrow{P}_\Sigma^i \cdot \vec{V}^i) = \rho_i(\vec{V}^i \cdot \vec{F}_{вн}^i) + \overleftrightarrow{P}_\Sigma^i : (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^i), \tag{6}$$

где P_Σ^i - полное давление, определяемое (1), $\vec{F}_{вн}^i$ - внешние и внутренние силы на единицу массы, ρ_i – плотность ионной компоненты. Если теперь выразить $\overleftrightarrow{P}_d^i : (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^i)$ в (5) на основе (6), то получим

$$-\frac{1}{2}\delta\int_U \vec{V}^i \left(\rho_i \frac{d\vec{V}^i}{dt} + \mathrm{Div}\overleftrightarrow{P}^i - m_i \vec{V}^i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^i - \rho_i \vec{F}_{вн}^i \right) dU = -\delta\int_U L_i dU = 0,$$

$$L_i = \frac{1}{2}\vec{V}^i \left(\rho_i \frac{d\vec{V}^i}{dt} + \mathrm{Div}\overleftrightarrow{P}^i - m_i \vec{V}^i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^i - \rho_i \vec{F}_{вн}^i \right)$$ – плотность лагранжиана,

которая удовлетворяет общему уравнению

$$\frac{\partial L}{\partial V_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial(\partial V_\beta / \partial x_\alpha)} = 0, \tag{7}$$

справедливому и для электронной компоненты.

Подставив значение L_i в уравнение (7) и произведя дифференцирование, получим уравнение движения для ионной компоненты «i»

$$\rho_i \frac{d\vec{V}^i}{dt} = -\mathrm{Div}\overleftrightarrow{P}^i + \rho_i \vec{F}_{вн}^i + 2m_i(\vec{V}^i \cdot \vec{\nabla}\vec{J}^i), \tag{8}$$

где оператор Div обозначает тензорную дивергенцию.

Повторив аналогичные выкладки для отрицательной компоненты плазмы, находящейся вблизи термодинамического равновесия ($T_e \approx T_i$), подобное уравнение можно получить и для электронной компоненты «е». Сложив полученное уравнение для электронов с (8) и положив $n_e \approx n_i = n$, $\vec{V}_e \approx \vec{V}_i = \vec{V}$ и $\vec{F}^i_{вн} \approx \vec{F}^e_{вн} = \vec{F}_{вн}$, и учтя, что $m_e + m_i = m_i(1 + m_e/m_i) \approx m_i = m$ и $\rho_i \approx \rho$, получаем уравнение движения

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\mathrm{Div}\overset{\leftrightarrow}{P} + \rho\vec{F}_{вн} + 2m\vec{V}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^i + \frac{m_e}{m_i}\frac{\partial}{\partial t}(n_e - n_i)\right], \qquad (9)$$

где $\overset{\leftrightarrow}{P} = \overset{\leftrightarrow}{P}{}^e + \overset{\leftrightarrow}{P}{}^i = \overset{\leftrightarrow}{P}{}^{e,i}_{\perp} + \overset{\leftrightarrow}{P}{}^{e,i}_{II}$. При выводе (9) предполагали выполнение условия квазинейтральности и $1 \gg m_e/m_i$, т.е. $m \approx m_i$.

В работах [3,4,10] подробно описаны вычисления $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^i$ от потоков $\vec{J}^i$ в (9), представленных в дрейфовом приближении. Уравнение (9) в предположении квазинейтральности $(n_e = n_i)$ и бесконечной проводимости вдоль силовой линии значительно упрощается ($\vec{E}_{II} = 0$). Кроме того, если рассматривать замкнутую аксиально-симметричную систему, то неоднородность в распределении плазмы вдоль траектории дрейфа может отсутствовать и интенсивность тока j_{II}, пропорциональная этой неоднородности, стремится к нулю. Окончательно вместо (9) получим упрощенное, но не изменяющее физической сути, уравнение

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\overset{\leftrightarrow}{P} + \vec{F}_{вн} + \frac{2\vec{V}}{n\mu H}\left[\frac{v_{\perp}^2}{ev_{II}^2}(\vec{F}_м\vec{j}_ц) + \frac{1}{e}(\vec{F}_ц\vec{j}_м)\right] = -\frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\overset{\leftrightarrow}{P} + \vec{F}_{вн} + \vec{f}_{дис}(\vec{F},\vec{j}), \qquad (10)$$

где $\vec{F}_м = -\mu\vec{\nabla}H$ – магнитная сила; $\vec{F}_ц = \frac{mv_{II}^2}{R^2}\vec{R} = 2\frac{\varepsilon_{II}}{H}\vec{\nabla}_{\perp}H$ – сила, действующая на частицу в неоднородном магнитном поле (центробежная), $\vec{j}_м = -\frac{nc}{H}\mu\mathrm{rot}\vec{H}$ – ток намагничивания; $\vec{j}_ц = \frac{ncmv_{II}^2}{H^2R^2}[\vec{R},\vec{H}]$ – ток центробежного дрейфа [11].

Уравнение (10) отличается от обычно используемых уравнений движения, наличием третьего члена в правой части, который описывает диссипативное взаимодействие дрейфовых токов с силами $e\vec{E}$, $\vec{F}_м$, $\vec{F}_ц$. Эта дополнительная часть явно учитывает замагниченность физически бесконечно малого элемента сплошной среды, так как кроме зависимости от дрейфовых токов $\vec{j}_{гр}, \vec{j}_ц, \vec{j}_{II}$ и $\vec{j}_м$, она пропорциональна $1/\mu$. Причем следует отметить, что в случае аксиально-симметричной плазменной системы, в ней постоянно протекают токи $\vec{j}_м$ и $\vec{j}_ц$. Однако, они не приводят к нарушению вмороженности, так как $\vec{j}_м$ и $\vec{j}_ц$ направлены по азимуту и $\vec{F}_м \perp \vec{j}_ц$, $\vec{F}_ц \perp \vec{j}_м$. В то же время возникновение флуктуаций может привести к появлению азимутальной неоднородности и, как следствие, к совпадению направления составляющих $\vec{F}_м$ и $\vec{j}_ц$, $\vec{F}_ц$ и $\vec{j}_м$.

Для того чтобы получить полную систему гидродинамических уравнений в дрейфовом приближении, необходимо к уравнению движения (10) добавить уравнения Максвелла, и для замыкания системы добавить два уравнения состояния для параллельной p_{II} и перпендикулярной $p_{\perp}$ составляющих тензора давления, как это делается в приближении двух адиабатических инвариантов ЧГЛ [12]. Если одно уравнение для $p_{\perp}$ является следствием применимости дрейфового приближения и соответствует постоянству первого адиабатического инварианта $(d\mu/dt) = 0$, то второе уравнение можно получить на основе закона сохранения энергии в дрейфовом приближении [9]

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = e(\vec{E}\cdot\vec{V}) + \mu\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{11}$$

где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{II} + \varepsilon_{\perp} = (mv_{II}^2/2) + (mv_{\perp}^2/2)$ – средняя энергия частиц, $\vec{V}$ – дрейфовая скорость. Из (11) получаем

$$\frac{d\varepsilon_{II}}{dt} = e(\vec{E}\cdot\vec{V}) + \mu\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dt} = e(\vec{E}\cdot\vec{V}) - \mu(\vec{V}_{\text{др}}\cdot\vec{\nabla})H. \tag{11'}$$

Так как

$$\frac{d(n\varepsilon_{II})}{dt} = \varepsilon_{II}\frac{dn}{dt} + n\frac{d\varepsilon_{II}}{dt}$$

и справедливо $p_{II} = 2n\varepsilon_{II}$, $p_{\perp} = n\varepsilon_{II}$ и $\dot{n} = -n\,\mathrm{div}\vec{V}$, то из (11') и последнего выражения и получаем $\frac{dp_{II}}{dt} = 2ne(\vec{E}\cdot\vec{V}) - \frac{2p_{\perp}}{H}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})H - p_{II}\mathrm{div}\vec{V}$ или

$$\frac{dp_{II}}{dt} + p_{II}\mathrm{div}\vec{V} = 2ne(\vec{E}\cdot\vec{V}) - \frac{2p_{\perp}}{H}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})H. \tag{12}$$

Соотношение (12) представляет собой субстанциональное уравнение баланса в дрейфовом приближении для составляющей тензора давления p_{II} с ненулевой правой частью (наличие источника). Умножим левую часть (4.3.2) на (H^2/ρ^3) и, учтя, что $\rho\,\mathrm{div}\vec{V}_{\text{др}} = -(d\rho/dt)$, получим после преобразовании

$$\frac{H^2}{\rho^3}\left(\frac{dp_{II}}{dt} - \frac{p_{II}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{H^2}{\rho^3}\frac{dp_{II}}{dt} + \frac{p_{II}H^2}{\rho^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{H^2}{\rho^3}\frac{dp_{II}}{dt} + p_{II}\frac{d}{dt}\left(\frac{H^2}{\rho^3}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{p_{II}H^2}{\rho^3}\right).$$

Теперь умножив правую часть (12) на (H^2/ρ^3), приравняем это произведение последнему выражению. Окончательно получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{II}H^2}{\rho^3}\right) = \frac{H^2}{\rho^3}\left[2ne(\vec{E}\cdot\vec{V}) - \frac{2p_{\perp}}{H}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})H\right]. \tag{13}$$

Условие $\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{\rho H}\right) = 0$ (14)

эквивалентно условию сохранения первого адиабатического инварианта (т.к. $\bar{v}_{\perp}^2 \approx p_{\perp}/\rho$, где $\bar{v}_{\perp}$ – перпендикулярная компонента средней скорости частицы). Выражения (14) и (13) составляют два уравнения состояния для параллельной p_{II} и перпендикулярной $p_{\perp}$ составляющих тензора давления, которыми замыкается диссипативная система уравнений в дрейфовом приближении.

Выпишем полную систему уравнений приближения ведущего центра с учетом $f_{\text{дис}}$ и в приближении идеальной проводимости $E = \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}]$:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{nm}\mathrm{Div}\hat{P} + \vec{F}_{\text{вн}} + \vec{f}_{\text{дис}}(F, j), \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla}(n\vec{V}), \quad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{V},\vec{H}],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{\rho H}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_{II}H^2}{\rho^3}\right) = \frac{H^2}{\rho^3}\left[2ne(\vec{E}\cdot\vec{V}) - \frac{2p_{\perp}}{H}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})H\right], \tag{15}$$

где $-(P)_{kn} = p_{II}\vec{e}_k\vec{e}_n + p_{\perp}(\delta_{kn} - \vec{e}_k\vec{e}_n)$, $\vec{F}_{\text{вн}} = \frac{1}{H}\left[-p_{\perp}\vec{\nabla}_{II}H + (p_{II} - p_{\perp})\vec{\nabla}_{\perp}H\right]$,

$$\vec{f}_{\text{дис}} = \frac{c\vec{V}}{enH^3}\left[2\frac{p_{\perp}}{R^2}(\vec{\nabla}H[\vec{R},\vec{H}]) - p_{II}(\mathrm{rot}\vec{H}\cdot\vec{\nabla}_{\perp}H)\right].$$

Правые части для функций $\vec{F}_{вн}$ и $\vec{f}_{дис}$ выражены через явные значения дрейфовых токов с выделением компонент тензора давления $p_{\perp}$ и p_{II}. В системе (15) неизвестными величинами являются $p_{\perp}$, p_{II}, $\vec{H}$, n и $\vec{V} = \vec{V}_{\varphi} + \vec{V}_{R}$.

Получение теоретических моделей, описывающих движение непрерывных систем, является важным разделом механики сплошных сред. Построение этих моделей базируется, как на использовании экспериментальных данных, так и на применении общеизвестных принципов механики, термодинамики, физики и в их основе лежит поиск дополнительных соотношений между параметрами, описывающими состояние рассматриваемой непрерывной среды. Известно, что основные уравнения механики, электродинамики, гидродинамики и так далее выводятся на основе вариационного уравнения Лагранжа. Соответствующий анализ показывает, что с помощью вариационных принципов возможно построение любых физических моделей, описывающих как обратимые, так и необратимые процессы. Поэтому применение принципов Пригожина и Онсагера, объединенных Дьярмати, для получения уравнения движения замагниченной плазмы на гидродинамическом уровне описания представляется достаточно перспективным. И здесь необходимо отметить следующее.

Возможность учета структуры физически бесконечно малого элемента плазмы в данной работе достигалась, с одной стороны, применением вариационных методов Пригожина и Онсагера, объединенных Дьярмати и позволяющих получить полностью самосогласованное уравнение с точностью выбранного приближения. С другой стороны, выбранное дрейфовое приближение, являясь одночастичным, изначально учитывает дискретность рассматриваемой ионизованной среды («атомно-молекулярную» структуру). Кроме того, оно допускает малые возмущения в пределах своей точности, то есть в пределах постоянства первого адиабатического инварианта μ.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ИНТАС 06-1000013-8823.

Список литературы

1. Альвен Х. Космическая плазма. – М.: Мир, 1983. –216 с.
2. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. – М.: Наука, 1977. – 336 с.
3. Богданов В.В. Учет диссипации в приближении двух адиабатических инвариантов Чу, Гольдбергера, Лоу. Солнечно-земные связи и электромагнитные предвестники землетрясений. Труды III Международной конференции. Часть 2. Петропавловск-Камчатский, 2004. С. 35-42.
4. Богданов В.В. Применение вариационных методов неравновесной термодинамики для описания бесстолкновительной плазмы в дрейфовом приближении. Препринт № 01. – Петропавловск-Камчатский: ИКИР ДВО РАН, 2002. –36 с.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
6. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. – М.: Наука, 1974. – 304 с.
7. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука.1982. – 608 с.
8. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М. : Янус-К, 1999. – 438 с.
9. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Вопросы теории плазмы. Вып. 2. – М.: Атомиздат. 1963. С.177-261.
10. Плетнев В.Д., Скуридин Г.А. Феноменологическое описание неравновесной магнитосферной плазмы в адиабатическом приближении // Космич. исслед. 1980. Т.XVIII, вып.6. С. 851-875.
11. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – М.: Атомиздат, 1968. – 288 с.
12. Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений / Проблемы современной физики». 1957. вып. 7.