

**ВЛИЯНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА
РАЗВИТИЕ СИММЕТРИЧНОЙ КИНК-МОДЫ**

**INFLUENCE OF THE NORMAL COMPONENT OF MAGNETIC FIELD ON
DEVELOPMENT OF SAUSAGE INSTABILITY**

А.В.Артемов^{1,2}, Л.М.Зелёный¹, В.Ю.Попов^{1,2}, Х.В.Малова^{1,3}

¹*Институт космических исследований РАН*

²*Физический факультет МГУ им. Ломоносова*

³*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Скобелева МГУ*

In this work we show that the polarization of the perturbed vector potential can influence the sausage instability in the current sheet with nonzero normal component of the magnetic field. Development of sausage instability in isotropic and anisotropic current sheets is discussed on term of the generalized energy principle.

Вопрос существования кинк и sausage неустойчивостей (Рисунок 1) в токовом слое, описываемом изотропной моделью Харриса [3] с нулевой нормальной компонентой магнитного поля B_z , ранее рассматривался как в гидродинамическом приближении [2], так и с использованием уравнений Власова-Максвелла в линейном приближении [5, 1]. Предполагалось, что возмущённый вектор-потенциал $\mathbf{A}(z, y) = \mathbf{A}(z) \exp(-itw +iky)$ имеет две компоненты $\mathbf{A} = A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$, связанные соотношением $div\mathbf{A} = 0$. Развитие неустойчивости обеспечивалось механизмом Ландау, при котором энергия частиц передавалась волновому возмущению. Взаимодействующими с волной частицами являлись как электроны, так и ионы. В центре токового слоя действие на них со стороны малого магнитного поля $B_x \sim B_0 z$ оказывается пренебрежимо мало, вследствие чего в этой области их траектории можно считать прямолинейными $y = v_y t$. Если при этом скорости частиц сопоставимы с фазовой скоростью волны $v_y \sim w/k$, то такие частицы оказываются резонансными, т.е. именно они участвуют в энергетическом обмене с волновым возмущением и отвечают за развитие неустойчивости.

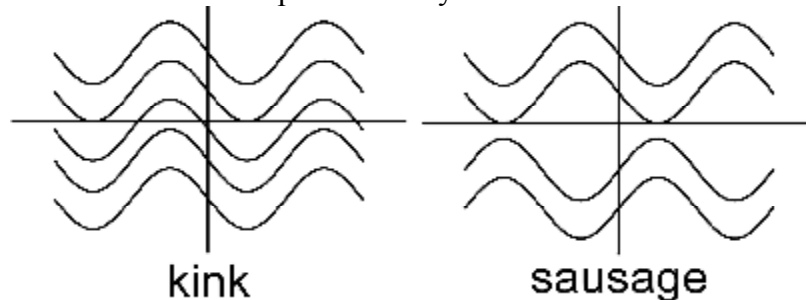


Рис.1. Силовые линии магнитного поля для симметричной (sausage) и асимметричной кинк мод.

Для данного типа неустойчивости могут существовать две моды: симметричная и несимметричная. Симметричная мода называется sausage ($A(z) = A(-z)$), несимметричная – kink-модой ($A(z) = -A(-z)$). Для токового слоя Харриса, в отсутствие нормальной компоненты магнитного поля B_z , проводилось моделирование обоих типов неустойчивостей, например, в работах [4, 8, 11]. Было показано, что, в отличие от разрывной неустойчивости [7], kink и sausage неустойчивости могут существовать и развиваться в токовом слое Харриса в широком диапазоне параметров.

В данной работе проводится анализ механизмов, влияющих на развитие sausage неустойчивости в токовом слое Харриса, если в системе учесть наличие нормальной компоненты магнитного поля B_z . В работе будут затронуты также вопросы

существования и развития sausage неустойчивости для модели анизотропного тонкого токового слоя (АТТС) [10].

Токовый слой Харриса. В токовом слое Харриса функции распределения частиц по скоростям заданы в виде смещённого теплового распределения Максвелла $f_j = n_0 \cosh^{-1}(z/L) \exp\left\{-\left[v_x^2 + (v_y - u_j)^2 + v_z^2\right] v_{Tj}^{-2}\right\}$, где $u_j = (2cT_j)/(eB_0L)$ – скорость дрейфа частиц сорта $j = e, i$. Параметр T_j обозначает температуру частиц, v_{Tj} – среднюю тепловую скорость, величина B_0 обозначает магнитное поле B_x на бесконечности, L обозначает толщину токового слоя. Введём безразмерный параметр $e = L/r_i$, где $r_i = (m_i v_{Ti} c)/(eB_0)$. Будем рассматривать возмущение векторного потенциала следующего вида $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1(z) \exp(-i\omega t +iky)$ и пренебрежем возмущением скалярного потенциала. В этом случае возмущение функции распределения частиц сорта $j = e, i$ примет вид:

$$f_{1j} = -\left(q_j/m_j c\right) \int_{-\infty}^t \left(i\omega \mathbf{A}_1 + [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}_1]\right) \partial_v f_j dt \quad (1)$$

Для токового слоя Харриса произведение $(i\omega \mathbf{A}_1 + [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}_1]) \partial_v f_j$ можно записать в виде:

$$\left(i\omega \mathbf{A}_1 + [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}_1]\right) \partial_v f_j = -\left(m_j/T_j\right) \left(i\omega \mathbf{A}_1 \mathbf{v} + u_j \hat{\mathbf{E}}_0 A_{1y} - u_j (ikv_z A_{1z} + ikv_x A_{1x} + ikv_y A_{1y})\right) \quad (2)$$

Здесь введено обозначение: $\hat{\mathbf{E}}_0 = d/dt$. Интегрируя по времени и учитывая отсутствие электронного вклада в резонансное взаимодействие, получаем возмущённую функцию распределения ионов $f_{1i} = (e/T_i c) \left\{u_i A_{1y} - \mathbf{A}_1 \mathbf{v} (ku_i - w)/(kv_y - w)\right\} f_i$ и электронов $f_{1e} = -(e/T_e c) u_e A_{1y} f_e$. Таким образом, возмущённые токи равны

$$j_{1a} = d_{ay} j_y A_{1y} \sum_j \left(u_j q_j / T_j c\right) - \left(e^2 / T_i c\right) \int v_a^2 (ku_i - w) / (kv_y - w) f_i A_{1a} d^3 v,$$

где $a = x, y, z$. Теперь, считая, что $w^2/k^2 c^2 \ll 1$, получаем уравнения для возмущённого вектор-потенциала:

$$\partial_z^2 A_{1a}(z) - k^2 A_{1a} = \sum_j \left(u_j q_j / T_j c\right) d_{ay} j_y A_{1y} - \left(e^2 / T_i c\right) \int v_a^2 (ku_i - w) / (kv_y - w) f_i A_{1a} d^3 v \quad (3)$$

Как видно из уравнений (3), в выражение для каждой компоненты возмущённого вектор-потенциала входит только одна компонента A_{1a} . Это означает, что все компоненты вектор-потенциала линейно независимы. Учитывая нормировку $\text{div} \mathbf{A} = 0$, получаем, что в системе может независимо распространяться возмущение с двумя различными поляризациями: $\mathbf{A}_1 = \{0, A_{1y}, A_{1z}\}$ и $\mathbf{A}_1 = \{A_{1x}, 0, 0\}$. Поляризация $\mathbf{A}_1 = \{0, A_{1y}, A_{1z}\}$ рассматривалась в работах [5, 1]. При таком типе поляризации возмущёнными оказываются следующие компоненты полей: $E_{1y} = -(i\omega/c) A_{1y}$, $B_{1x} = -\partial_z A_{1y} - k^2 \int_{-\infty}^z A_{1y} dz$.

При этом влияние магнитного поля B_z на систему будет заключаться в следующем: будучи замагниченными этим полем, электроны не смогут участвовать в резонансном взаимодействии с волной неустойчивости. При этом развитие неустойчивости будет обеспечиваться взаимодействием ионов, для которых поле $B_z \ll B_0$ слишком мало, чтобы существенно изменить их траектории в центральной области токового слоя. Наше рассмотрение аналогично оценке из работы [5], но отличается от нее тем, что ток $j^{res} \sim \int v_a^2 (ku_j - w) / (kv_y - w) f_e d^3 v$ не принят во внимание. На рисунке 2 проведено сравнение полученных результатов с работой [5]. Как видно из рисунка, в случае поляризации возмущения $\mathbf{A}_1 = \{0, A_{1y}, A_{1z}\}$, полученные результаты для модели токового

слоя Харриса с $B_z = 0$ и для изотропной модели с $B_z \neq 0$ не сильно различаются между собой.

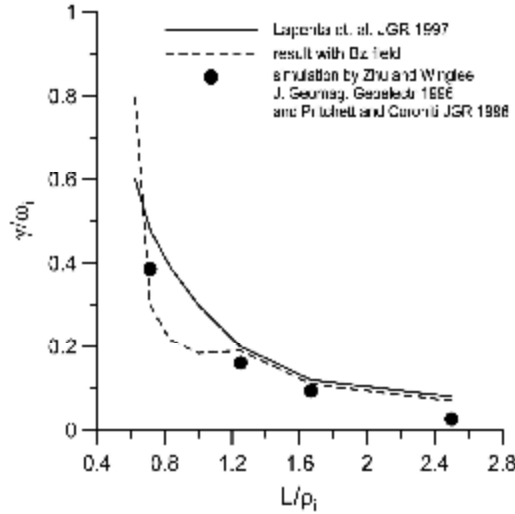


Рис.2. Инкремент неустойчивости как функция относительной толщины токового слоя. Сплошной линией показаны результаты для слоя Харриса [5], пунктирной - для слоя Харриса с $B_z \neq 0$, точками нанесены результаты моделирования [11].

Теперь рассмотрим поляризацию возмущения $\mathbf{A}_1 = \{A_{1x}, 0, 0\}$. Для этого случая возмущёнными оказываются компоненты поля $E_{1x} = -i(w/c)A_{1x}$, $B_{1y} = \partial_z A_{1x}$ и $B_{1z} = -ikA_{1x}$. Так как электроны замагничены полем B_z , то возмущение этого поля должно менять распределение электронов в пространстве. В этом случае необходимо учитывать возмущение скалярного потенциала $\Delta j_1 = 4pedn$. Чтобы получить уравнение для возмущённого вектор потенциала A_{1x} с учётом возмущения j_1 , воспользуемся энергетическим балансом $\partial_t \int (\mathbf{B}_1^2 + \mathbf{E}_1^2) dt = -8p \int (\mathbf{j}_1 \mathbf{E}_1) dt$. Теперь учтём, что возмущённая плотность тока равна $\mathbf{j}_1 = e \int \mathbf{v} (f_{1i} + f_{1e}) d^3v$, где

$$f_{1i} = (\partial f_{1i} / \partial A_0) A_{1y} + f_{1i}^{res}, \quad f_{1e} = (\partial f_{1e} / \partial A_0) A_{1y} + f_{1e}^{\%} \quad (4)$$

Здесь возмущение функции распределения $f_{1e}^{\%}$ вызвано возмущением скалярного потенциала (при изменении концентрации электронов), а f_{1i}^{res} отвечает за резонансное взаимодействие ионов с волной неустойчивости. При записи равенств (4) мы пренебрегли возмущением ионной функции распределения, вызванной возмущением скалярного потенциала, что для ионов справедливо в силу их слабой замагниченности. Далее воспользуемся соотношением $df_{1e}^{\%}/dt = -(\mathbf{v} \mathbf{E}_1) (\partial f_{0e} / \partial H_{0e})$ (H_{0e} - полная невозмущённая энергия электронов), полученным в работе [6]. Учитывая замагниченность электронов ($n_{1e}/n_0 = B_{1z}/B_0$) и пренебрегая возмущением энергии электрического поля $\int \mathbf{E}_1^2 dt$, получаем следующее энергетическое соотношение:

$$\partial_t \int (|\partial_z A_{1x}|^2 + k^2 |A_{1x}|^2 - 4p/c j_i^{res} |A_{1x}|^2 + (T_e n_0 / B_z^2) k^2 |A_{1x}|^2) dt = 0 \quad (5)$$

Здесь также было учтено, что $\int f_{1e}^{\%} d^3v = n_{1e}$. Найдём вариацию уравнения (5) по вектор-потенциалу A_{1x} для нахождения собственных векторов уравнения (5):

$$\partial_z^2 A_{1x} - k^2 (1 + T_e n_0 / B_z^2) A_{1x} + A_{1x} (4pe^2 / T_e c^2) \int v_x^2 (k v_j - w) / (k v_y - w) f_i d^3v = 0 \quad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в интегральном виде, учитывая, что $d/dt \approx (\partial/\partial t + v_y \partial/\partial y)$ в центральной области токового слоя:

$$\partial_z^2 A_{1x}(z, t) - \left[k^2 (1 + T_e n_0 / B_z^2) + e^2 U_i \right] A_{1x}(z, t) - e^2 U_i \mathcal{Y}_x(z, t) L^{-2} \cosh^{-2}(z/L) = 0 \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{Y}_x = \int_0^t A_{1x}(t') \Gamma(t-t') dt' - A_{1x}(t=0) g(t)$$

$$\Gamma(t-t') = ikL/\sqrt{p} \int (v_y - u_i)/v_{Ti} \exp\left(-i(v_y/v_{Ti})kLw_i(t-t') - (v_y - u_i)^2/v_{Ti}^2\right) d(v_y/v_{Ti}) \quad (8)$$

$$g(t) = 1/\sqrt{p} \int \exp\left(-i(v_y/v_{Ti})kLw_i(t-t') - (u_i - v_y)^2/v_{Ti}^2\right) d(v_y/v_{Ti})$$

U_i обозначает функцию, равную единице в центральной области токового слоя и нулю вне её, $w_i = v_{Ti}/r_i$. Уравнение (7) в момент времени $t=0$ можно переписать в виде $\partial_z^2 A_{1x} - U(z)A_{1x} = 0$, где $U(z) = k^2(1 + T_e n_0/B_z^2) > 0$. Уравнение такого типа не имеет дискретного спектра решений. Поэтому sausage-возмущение с рассматриваемой поляризацией не может существовать в токовых слоях с симметричным распределением частиц по скоростям в направлении X ($j_x = 0$). Решение уравнения (8) показывает, что зависимость от времени амплитуды $y_x = \int A_{1x} dz$ является убывающей, что противоположно поведению функции $y_y = \int A_{1y} dz$ при поляризации $\mathbf{A}_1 = \{0, A_{1y}, A_{1z}\}$ (Рисунок 3), то есть у поляризации $\mathbf{A}_1 = \{A_{1x}, 0, 0\}$ будут отрицательный инкремент.

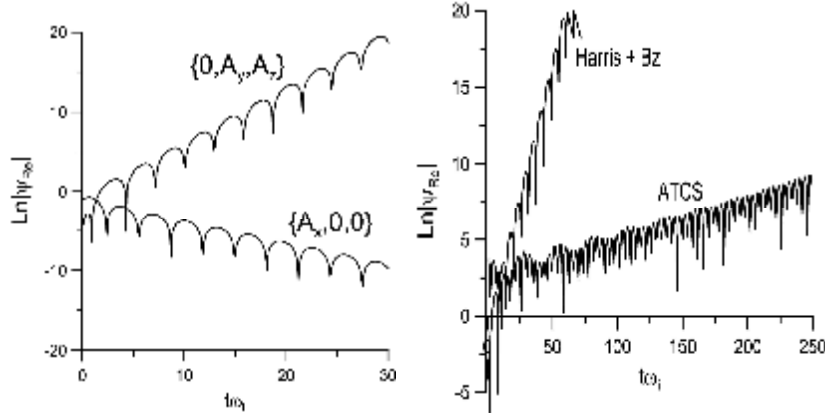


Рис.3. Слева амплитуды возмущённых вектор потенциалов $y_x = \int A_{1x} dz$ и $y_y = \int A_{1y} dz$ для двух типов поляризации в токовом слое Харриса с $B_z \neq 0$. Справа амплитуды возмущённых вектор потенциалов $y = \int A_{1y} dz$ для токового слоя Харриса с $B_z \neq 0$ и АТТС.

Анизотропный тонкий токовый слой

Следует отметить, что учет ненулевой нормальной компоненты магнитного поля в модели Харриса, общепринятый в исследованиях устойчивости, превращает ее в несамосогласованную модель и делает результаты многих ранее опубликованных работ некорректными, т. к. при $B_z \neq 0$ за конечное время $t \sim m_i c / e B_z$ устанавливается новое распределение – анизотропный токовый слой, который уже имеет детерминированную толщину $L \leq r_i$ [9]. Для более адекватного подхода рассмотрим устойчивость самосогласованной модели АТТС [10]. В рассматриваемой модели уравнение для компоненты возмущённого вектор-потенциала A_{1y} принимает вид:

$$\partial_z^2 A_{1y} = \left(k^2 + \Theta \left(\partial j_y / \partial A_0 \right) \right) A_{1y} - \Theta J^{res}(t) \quad (9)$$

Здесь $J^{res} = iU_i \int_0^t F(t-t') A_{1y}(t') dt + A_{1y}(t) \mathcal{F}^{\%}(t)$, и $\Theta = (T_i n_0 8p) / (B_0^2 m^{-2/3})$, $k = kL$,

$z = z/L$. Параметр e определяет анизотропию источников ионов ($e = v_D / v_{Ti}$, v_D – скорость дрейфа ионов в источниках) и связан с толщиной токового слоя соотношением $L = e^{1/3} r_i$. Функции под интегралом равны $F(t) = \partial j_2^{\%} / \partial A_0$ и $\mathcal{F}^{\%}(t) = \partial j_1^{\%} / \partial A_0$, где:

$$j_n^{\%} = \int_{-\infty}^{\infty} w^n \exp(-iwt) \mathcal{J}^{\%}(w) dw, \quad \mathcal{J}^{\%}(w) = n_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_i dv_z dv_x \quad (10)$$

$A_0(z)$ является Y компонентой невозмущённого вектор потенциала. Уравнение (10) выводится аналогично уравнению (4), но так как функция распределения ионов для АТТС определяется сложнее, чем для токового слоя Харриса, часть интегралов и производных берётся не аналитически, а численно.

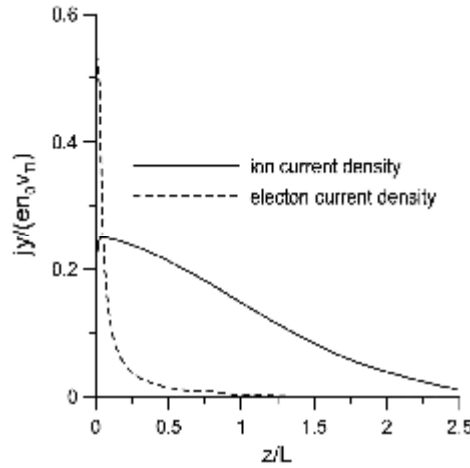


Рис.4. Профили электронной и ионной плотности токов для АТТС.

В отличие от токового слоя Харриса, в АТТС профили электронного и ионного токов не совпадают (Рисунок 4), вследствие чего в свободную энергию $\partial j_y / \partial A_0$ значительный вклад вносят именно электронные токи, с более резкими градиентами в центре токового слоя. Резонансный ток J^{res} , напротив, обеспечен только ионной популяцией. В силу этого соотношение $\left\| J^{res} \left(\partial j_y / \partial A_0 \right)^{-1} A_{1y}^{-1} \right\|$ для АТТС мало по сравнению с аналогичным соотношением для токового слоя Харриса, что может способствовать возникновению различий в значениях собственных частот w sausage неустойчивости (Рисунок 3).

Выводы

В данной работе проведён анализ развития sausage неустойчивости для токового слоя Харриса в присутствии нормальной компоненты магнитного поля. Численно показано, что для поляризации $\mathbf{A}_1 = \{A_{1x}, 0, 0\}$ инкремент $g \sim \partial_t \ln |y| < 0$ отрицателен, а для поляризации $\mathbf{A}_1 = \{0, A_{1y}, A_{1z}\}$ значение инкремента положительно.

Для АТТС при поляризации $\mathbf{A}_1 = \{0, A_{1y}, A_{1z}\}$ инкремент неустойчивости положителен, но его величина меньше инкремента неустойчивости для токового слоя Харриса. Этот эффект вызван сильным вкладом электронов в плотность тока в центральной области токового слоя для АТТС, в результате чего, именно $j_y^{(elect)}$ даёт наибольший вклад в адиабатическую часть возмущённого тока $j^{ad} = \left(\partial j_y / \partial A_0 \right) A_{1y}$. Так как

резонансное взаимодействие с волной неустойчивости обеспечивает только ионная компонента, то отношение $\|J^{res}/j^{ad}\|$ для АТТС получается много меньше, чем аналогичное соотношение для изотропных токовых слоёв, а именно это отношение определяет величину инкремента $g = \text{Im } w$.

Эта работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-02-17003, 06-02-72561, и грантом Научных школ НШ-5359.2006.2.

Список литературы

1. Buchner J. and Kuska J.-P. Sausage mode instability of thin current sheets as a cause of magnetospheric substorms // *Ann. Geophys.* 1999. Vol.17. P. 604-612.
2. Daughton W. Two-fluid theory of the drift kink instability // *J. Geophys. Res.* 1999. Vol. 104, N. A12. P. 28,701-28,707.
3. Harris E.G. On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic fields // *Nuovo Chimento.* 1962. 23, 115-119.
4. Karimabadi H., Pritchett P.L., Daughton W. and Krauss-Varban D., 2003. Ion-ion kink instability in the magnetotail: 2. Three-dimensional full particle and hybrid simulations and comparison with observations // *J. Geophys. Res.*, vol. 108, N. A11, 1401, doi: 10.1029/2003JA010109
5. Lapenta G. and Brackbill J.U., A kinetic theory for the drift-kink instability // *J. Geophys. Res.* 1997. Vol. 102, N A12. P. 27,099-27,108.
6. Laval G., R. Pellat, M. Vuillemin. Instabilités électromagnétiques des plasmas sans collisions in: *Plasma Physics and Controlled Fusion Research.* 1966.vol.II, p. 259-276, International Atomic Energy Agency, Vienna.
7. Pellat, R., Coroniti, F. V. and Pritchett, P. L., Does ion tearing exist? // *Geophys. Res. Lett.* 1991. V.18. P. 143–146.
8. Pritchett P.L., Coroniti F.V. and Decyk V.K., Three-dimensional stability of thin quasi-neutral current sheets. *J. Geophys. Res.* 1996. Vol. 101, N. A12. P. 27,413-27,429.
9. Zelenyi L. M., M.I. Sitnov, H. V. Malova, and A.S. Sharma. Thin and superthin ion current sheets. Quasi-adiabatic and nonadiabatic models // *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2000. Vol. 7, 127-139.
10. Zelenyi L. M., H. V. Malova, V. Yu. Popov, D. Delcourt, and A.S. Sharma, Nonlinear equilibrium structure of thin currents sheets: influence of electron pressure anisotropy // *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2004. Vol. 11, 1-9.
11. Zhu Z. and Winglee R.M., Tearing instability, flux ropes, and the kinetic current sheet kink instability in the Earth's magnetotail: A three-dimensional perspective from particle simulations // *J. Geophys. Res.* 1996. Vol. 101, N. A3, P. 4885-4897.