

*Секция 1 «Влияние солнечной активности на геосферные процессы»*

**РАЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО АНИЗОТРОПНОГО  
ТОКОВОГО СЛОЯ**

**TEARING INSTABILITY OF THIN ANISOTROPIC CURRENT SHEET**

*Л.М.Зелёный<sup>1</sup>, А.В.Артемов<sup>1,2</sup>, В.Ю.Попов<sup>1,2</sup>, Х.В.Малова<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup>*Институт космических исследований РАН*

<sup>2</sup>*Физический факультет МГУ им. Ломоносова*

<sup>3</sup>*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Скобелъцына МГУ*

In this work we investigate a possibility of the generation of tearing mode instability in thin anisotropic current sheet. We show that wide “windows” of instability exist in the parametric space. Also in this work the problem of the influence trapped plasma on tearing instability is studied.

В данной работе анализируется возможность возникновения разрывной (тиринг) неустойчивости в токовых слоях магнитосферы Земли. Данная неустойчивость представляет собой волну  $\hat{A} = A(z)\exp(-i\omega t + ikx)$ , распространяющуюся перпендикулярно току, поддерживающему существование слоя. При развитии тиринг неустойчивости в центральной области токового слоя происходит пересоединение силовых линий магнитного поля (Рисунок 1). Существование данного типа неустойчивости обеспечивается за счёт механизма Ландау, отвечающего за передачу энергии от частиц к волнам, за счёт совпадения фазовой скорости волны и скорости движения группы (резонансных) частиц.

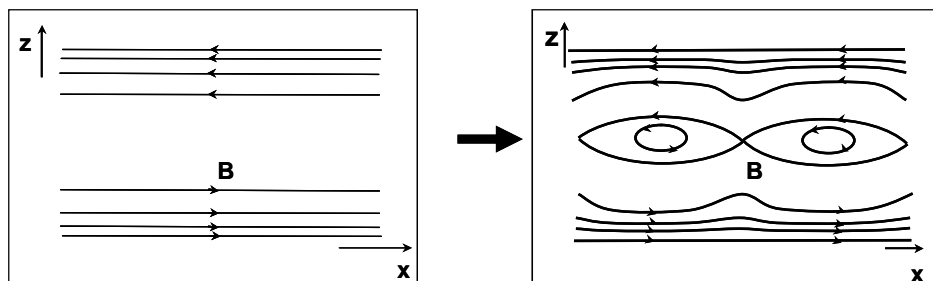


Рис. 1. Результат развития в токовом слое тиринг неустойчивости.

Изначально данную неустойчивость рассматривали для модели изотропного токового слоя [2]. Её развитие обеспечивалось наличием в центре токового слоя популяции немагнитных резонансных электронов. Но данная модель не предусматривала наличия нормальной компоненты магнитного поля  $B_z$ , которая всегда присутствует в магнитосфере Земли и является остаточным полем магнитного диполя нашей планеты. В присутствии поля  $B_z$  электроны оказываются замагниченными данным полем, и популяция резонансных электронов пропадает даже при очень малых значениях  $B_z$ . Но в токовом слое остается ионная компонента, для которой нормальное поле не является достаточно большим, чтобы исключить резонансное взаимодействие с волной неустойчивости. Такая неустойчивость называется ионной тиринг модой. В результате долгой дискуссии установилось мнение, что развитие и ионной тиринг моды для изотропного токового слоя [1] в присутствии поля  $B_z$  также невозможно [3]. Это связано с тем, что замагниченные электроны крайне чувствительны к возмущению магнитного поля  $dB_z$ . При изменении поля  $B_z$  меняется и плотность замагниченных электронов  $dn_e \sim dB_z$ . Так как в токовых слоях сохраняется квазинейтральность, то движение электронов сопровождается движением тяжёлых ионов. Энергия, необходимая на это

движение, превосходит ту энергию, что выигрывается токовым слоем от «слипания» токовых нитей.

Ситуация, сложившаяся для изотропных токовых слоёв, в корне отличается от той, что наблюдается при изучении тиринг неустойчивости в модели анизотропного тонкого токового слоя АТТС [7]. Для АТТС характерны сильные электронные и ионные токи в центре слоя, способствующие увеличению «свободной» энергии  $W_j \sim \partial j_y / \partial A_0$  ( $A_0$  - невозмущённый вектор потенциал). В связи с этим существуют такие параметры  $e = v_D / v_T$ ,  $b_n = B_z / B_0$  и  $t = T_i / T_e$ , для которых суммарная энергия, выигрываемая АТТС за счёт пересоединения, превышает ту энергию, которую необходимо затратить на возмущение магнитного поля и движение замагниченных электронов. Выше были введены основные параметры изучаемой модели токового слоя через скорость дрейфа ионов в источниках  $v_D$ , их тепловую скорость  $v_T$ , величину магнитного поля токового слоя на его границе  $B_0 = B_x(L)$ , температуру ионов  $T_i$  и электронов  $T_e$ . Толщина токового слоя связана с ионным гирорадиусом соотношением  $L = e^{1/3} r_i$ .

### Модель анизотропного тонкого токового слоя

В рассматриваемой модели токовый слой формируется двумя потоками ионов из источников, в которых задано распределение частиц по скоростям  $f_i \sim \exp\left(- (v_\perp - v_D)^2 v_{Ti}^{-2} - v_\parallel^2 v_{Ti}^{-2}\right)$ . Толщина такого токового слоя не превышает ионный гирорадиус  $L \leq r_i$ . Электронная компонента токового слоя рассматривается в полужидкостном приближении [7]. Далее функция распределения  $f_i$  записывается в интегралах движения:  $w$  – безразмерная полная энергия частиц,  $I_z \sim \int v_z dz$  – безразмерный адиабатический инвариант,

$$f_i \sim \exp\left(- e^{-2/3} \left\{ \left( \sqrt{w - I_z} - e^{-2/3} \right)^2 + I_z \right\}\right).$$

Учитывая теорему о сохранении фазового объёма, функция распределения ионов, записанная в интегралах движения, строится от краёв токового слоя к его центральной области.

### Вывод общего энергетического соотношения для тиринг неустойчивости

Тиринг неустойчивость представляет собой возмущение векторного и скалярного потенциалов в виде волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1(z) \exp\{-i\omega t + ikx\} \\ j_1 = j_1(z) \exp\{-i\omega t + ikx\} \end{cases}.$$

Для анализа возможности возникновения неустойчивости в токовом слое можно использовать энергетическое соотношение  $dW + g(\partial W^{res} / \partial w) = 0$ . Здесь  $dW$  – возмущение энергии в результате взаимодействия токового слоя с волной,  $g$  – инкремент неустойчивости ( $g = \text{Im } w$ ),  $W^{res}$  – энергия резонансного взаимодействия частиц с волной. Если  $dW < 0$ , то  $g > 0$  и возмущение будет возрастать. Токовые слои, для которых  $dW < 0$ , называются неустойчивыми. Для того, чтобы получить энергетические соотношения  $dW$  для анизотропного тонкого токового слоя, воспользуемся балансом энергий:  $\partial_t \int (\mathbf{B}_1^2 + \mathbf{E}_1^2) dt = -8p \int (\mathbf{j}_1 \mathbf{E}_1) dt$ . Далее запишем возмущённую функцию распределения  $f_{1s} = (\partial f_{0s} / \partial A_0) A_1 + \mathcal{J}_{1s}^{\%}$ , здесь  $\mathcal{J}_{1s}^{\%}$  возмущение функции распределения частиц сорта  $s = e, j$ , вызванное возмущением скалярного потенциала  $j_1$  и резонансным взаимодействием частиц с волной возмущения. Теперь для  $\mathbf{j}_1$  можно записать следующее соотношение:

$$\mathbf{j}_1 = \sum_s \int \mathbf{v} f_{1s} d^3 v = A_1 \sum_s e_s \left( \partial \int \mathbf{v} f_{0s} d^3 v / \partial A_0 \right) + \sum_s e_s \int \mathcal{J}_{1s}^{\%} d^3 v$$

Учтём, что  $\int \mathbf{v} f_{0s} d^3 v = \mathbf{j} = j_y \mathbf{e}_y$ . Таким образом, ток  $\mathbf{j}_1$  принимает вид:

$$(\mathbf{j}_1 \mathbf{E}_1) = -\partial_t \left( 2^{-1} A_1^2 (\partial j_y / \partial A_0) \right) + \sum_s \int (\mathbf{v} \mathbf{E}_1) \mathcal{J}_{1s}^{\%} d^3 v$$

Так как для электронов в нашей модели специально не вычисляется функция распределения (они рассматриваются в полужидкостном приближении), то мы можем выбрать  $f_{0e} = F_{0e}(H_{0e}, P_y)$ . Для такой функции распределения было показано [2], что имеет место следующее соотношение:

$$\partial_t \mathcal{J}_{1e}^{\%} / (\partial f_{0e} / \partial j_0) = -(\mathbf{E}_1 \mathbf{v}) \quad (1)$$

Функция распределения ионов  $f_{0i}$  выражена в используемой модели через адиабатический инвариант  $I_z$  и полную энергию частиц  $w + j$ . Поэтому использовать для неё соотношение (1) некорректно. Для  $f_{0i}$  получим соотношение, играющее ту же роль, что и (1). Для этого воспользуемся следующим соотношением  $(L_0 + L_1)(f_0 + f_1) = 0$ . Здесь  $L_0 = \partial_t + \mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}} + (e/m_i c)(c \mathbf{E}_0 + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]) \partial_{\mathbf{v}}$  и  $L_1 = (e/m_i c)(c \mathbf{E}_1 + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1]) \partial_{\mathbf{v}}$ . Учитывая, что  $L_1 f_1 \ll 1$ , получаем равенство:

$$L_0 \left( (\partial f_{0i} / \partial A_0) A_1 + \mathcal{J}_{1i}^{\%} \right) = -(e/m_i c)(\mathbf{E}_1 + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1]) \partial_{\mathbf{v}} f_{0i}$$

Распишем подробно  $\partial_{\mathbf{v}} f_{0i}$  (учитывая, что  $f_{0i} = f_{0i}(w, I_z(v_y, v_z))$ ):

$$\partial_{\mathbf{v}} f_{0i} = -(m_i / T_i) \mathbf{v} \partial_w f_{0i} + \partial_{I_z} f_{0i} (\partial I_z / \partial v_y) \mathbf{e}_y + \partial_{I_z} f_{0i} (\partial I_z / \partial v_z) \mathbf{e}_z$$

Учитывая вид адиабатического инварианта  $I_z$  [7], получим:

$$\begin{cases} \partial I_z / \partial v_y = (m v_y / e) (\partial I_z / \partial j) + (m c / e) (\partial I_z / \partial A) \\ \partial I_z / \partial v_z = (m v_z / e) (\partial I_z / \partial j) \end{cases}$$

Переписывая вид  $\partial_{\mathbf{v}} f_{0i}$  и подставляя его в уравнение  $L_0 f_1 + L_1 f_0 = 0$ , получаем (учитывая, что  $L_0 = d/dt$  и  $\int v_x f_{0i} d^3 v = 0$ ,  $h_i = w + e j / T_i$ ):

$$(T_i / 2 m_i) \int (d f_{0i} / d h_i)^{-1} (d \tilde{f}_{1i}^2 / dt) d^3 v = - \int (\mathbf{E}_1 \mathbf{v}) \tilde{f}_{1i} d^3 v.$$

Таким образом, получаем:

$$(\mathbf{j}_1 \mathbf{E}_1) = -\partial_t \left( A_1^2 \partial j_y / \partial A_0 \right) + 2^{-1} e \partial_t \int \left\{ (d f_{0e} / d j)^{-1} \tilde{f}_{1e}^2 + (d f_{0i} / d h_i)^{-1} \tilde{f}_{1i}^2 \right\} d^3 v.$$

Так как электроны полностью замагничены, то возмущение их плотности напрямую связано с возмущением нормальной компоненты магнитного поля. Учитывая этот факт и рассматривая возмущение скалярного потенциала, как решение уравнения  $\Delta j_1 = -4 p e (n_{1i} - n_{1e})$ , получим следующую оценку:

$$e j_1 / T_e \approx B_{1z}(z) / B_z$$

Теперь оценим вклад возмущённого скалярного потенциала в общую энергию возмущения, пользуясь оценкой  $\partial j \sim k j \sim r_i^{-1} j$ :

$$r_i^{-1} j = B_{1z} (r_i^{-1} T_e / e B_z) = B_{1z} (T_e / T_i) (v_{Ti} / c) (B_0 / B_z) \ll k A_{1y}$$

Теперь, используя соотношение  $w \ll c k$ , получаем, что  $E_1 = -(i w / c) A_1 - \nabla j_1 \ll B_1$ .

Таким образом, энергия неустойчивости выглядит следующим образом:

$$dW = \int \left\{ (\partial_z A_1)^2 + k^2 A_1^2 + (4 p / c) (\partial j_y / \partial A_0) A_1^2 + 4 p e \int \left\{ \mathcal{J}_{1e}^{\%} (\partial f_{0e} / \partial j_0) + \mathcal{J}_{1i}^{\%} (\partial f_{0i} / \partial w) \right\} d^3 v \right\} dt.$$

Теперь используем следующее соотношение:

$$j_{1s} = (\partial f_{0s} / \partial j_0) j_1 + f'_{0s} Y_s.$$

Здесь  $Y_s = W^{res}(w=0)$  остаточная энергия резонансного взаимодействия волны возмущения с частицами [4]. Учитывая, что для возмущённых функций распределения  $\langle f_{1s} \rangle_s = 0$ , где  $\langle \dots \rangle = (\int \dots dx dz) / (\int dx dz)$ , получаем в окончательном виде энергетический функционал:

$$dW = \int \left\{ (\partial_z A_1)^2 + k^2 A_1^2 + (4p/c) (\partial j_y / \partial A_0) A_1^2 \right\} dt + \\ + \int \left\{ 4pe \int (\partial f_{0e} / \partial j_0) j_1^2 d^3 v + 4pe \int f'_{0e} \langle H_{1e} \rangle_e^2 d^3 v + 4pe \int f'_{0i} \langle H_{1i} \rangle_i^2 d^3 v \right\} dt.$$

Так как мы ищем области параметров с отрицательным значением суммарной энергии  $dW$ , то, приравнявая к нулю первую вариацию функционала  $dW(A_{1y})$  по функции  $A_{1y}$ , получим уравнение на возмущённый вектор потенциал.

### Численные результаты

Решением уравнения  $dW(A_{1y})/dA_{1y} = 0$  будет функция возмущённого вектор потенциала, минимизирующая функционал  $dW(A_{1y})$ . Сам функционал  $dW(A_{1y})$  можно разбить на сумму слагаемых:  $W_b = \int \left\{ (\partial_z A_1)^2 + k^2 A_1^2 \right\} dt$ ,  $W_j = \int (4p/c) (\partial j_y / \partial A_0) A_1^2 dt$ ,  $W_e = \int 4pe \int (\partial f_{0e} / \partial j_0) j_1^2 d^3 v dt$ ,  $W_H = 4pe \int \left\{ \int f'_{0e} \langle H_{1e} \rangle_e^2 d^3 v + \int f'_{0i} \langle H_{1i} \rangle_i^2 d^3 v \right\} dt$ . Вводя нормировочный множитель  $8p/B_0^2$ , можно рассмотреть вклад каждого из слагаемых в общий энергетический баланс (Рисунок 2). Как видно из графиков, положительный стабилизирующий вклад в суммарную энергию для длинноволнового возмущения ( $kr_i < 0.2$ ) в основном вносят энергия возмущённого магнитного поля  $W_b$  и энергия взаимодействия частиц с волной  $W_H$ . Для возмущения с волновыми числами  $kr_i \approx 0.7$  ( $kL \sim 1$ ) развитие тиринг неустойчивости ограничивает энергия сжимаемости электронов  $W_e$ .

Для того, чтобы определить возможность развития тиринг неустойчивости для различных токовых слоёв, обратимся к рисунку 3. На нём показаны графики суммарной энергии для нескольких токовых слоёв с различными толщинами и значениями нормального магнитного поля  $b_n = B_z/B_0$ . Как видно из рисунка, для токовых слоёв с фиксированным значением параметра  $b_n$  роль управляющего параметра тиринг неустойчивости играет толщина токового слоя. Для наиболее тонких токовых слоёв существуют области отрицательной суммарной энергии  $dW < 0$ . Что касается параметра  $b_n$ , то его изменение в рамках токовых слоёв с одинаковой толщиной приводит к изменению области значений волнового числа  $kr_i$ , для которой  $dW < 0$ .

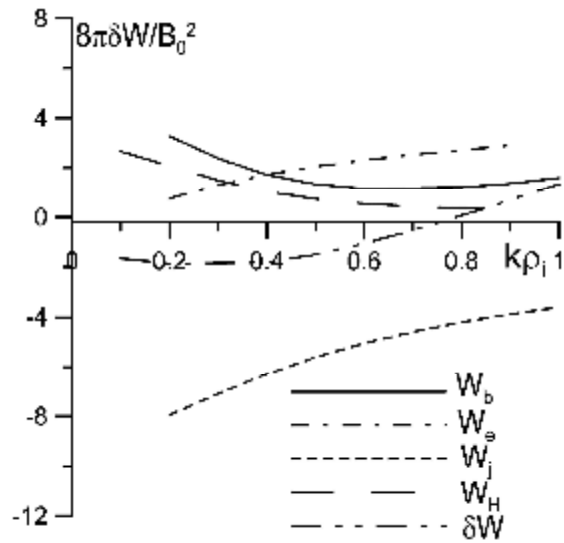


Рис.2. Графики компонент возмущённой энергии и суммарной энергии тиринг неустойчивости как функции волнового числа  $kr_i$ .

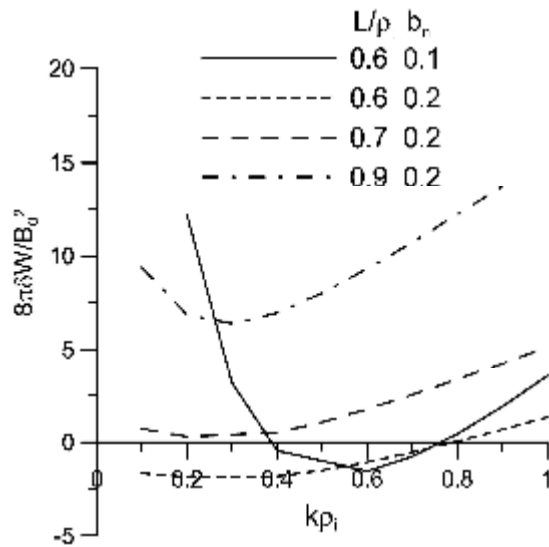


Рис.3. Графики суммарных энергий тиринг неустойчивости как функции волнового числа  $kr_i$  для токовых слоёв с  $T_e = T_i/3$ .

Так как при развитии тиринг неустойчивости возможно существование пакета волн с различными волновыми числами  $kr_i$ , то есть смысл рассмотреть суммарную область неустойчивости в пространстве параметров  $e \times b_n$ . Под суммарной областью неустойчивости мы понимаем совокупность всех областей неустойчивости для различных волновых чисел из диапазона  $k \in [r_i^{-1}(B_z/B_0), L/r_i^2]$  (Рисунок 4). Как видно из Рисунка 4, наиболее подвержены тиринг неустойчивости тонкие токовые слои ( $e \ll 1$ ).

Таким образом, в данном разделе показано, что для анизотропных тонких токовых слоёв возможно развитие тиринг неустойчивости.

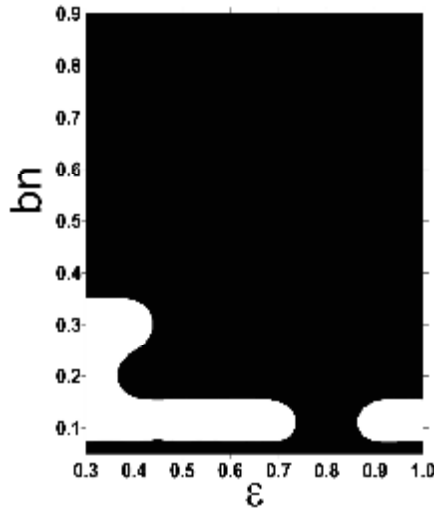


Рис.4. Суммарная область неустойчивости для токовых слоёв с  $T_e = T_i/3$ .

### Учёт влияния захваченных частиц

Как было показано выше, функция распределения ионов записывается через интегралы движения следующим образом  $f_i \sim \exp\left(-e^{-2/3}\left\{\sqrt{w-I_z} - e^{-2/3}\right\}^2 + I_z\right)$ . Если для какого-либо элемента фазового объёма ( $\dot{v} \times z$ )  $I_z > w$ , то частицы в этом элементе считаются захваченными и для них задаётся функция распределения [5]:

$$f_{trap} \sim k \exp\left(-e^{-2/3}\left\{w + e^{-4/3}\right\}\right)$$

Здесь коэффициент  $k$  определяет пропорциональное соотношение между пролётными и захваченными частицами в токовом слое. Влияние захваченных ионов на структуру токового слоя для рассматриваемой модели изучалось ранее [6]. Было показано, что при скапливании в токовом слое захваченных частиц происходит его старение (разрушение профиля плотности тока). Похожий результат представлен на рисунке 5.

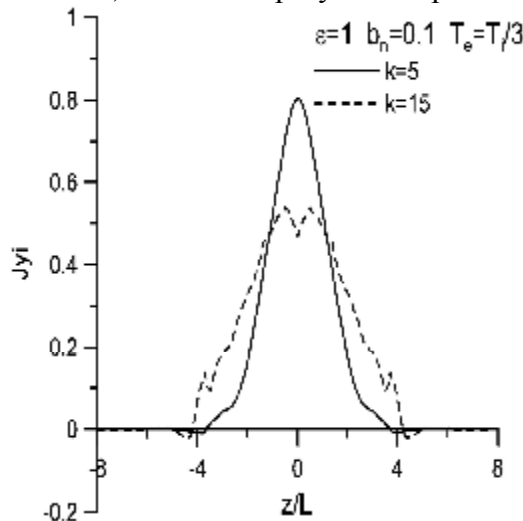


Рис.5. Безразмерная плотность ионного тока для двух токовых слоёв с различными значениями показателя  $k$ .

Как видно из рисунка, при увеличении величины коэффициента  $k$  происходит расширения профиля плотности ионного тока и образование провала в центре. Данное явление приведёт к уменьшению величины  $F(z) = \partial j_y / \partial A_0$  в центре токового слоя. Соотношение  $\partial j_y / \partial A_0$  является с точностью до коэффициента плотностью свободной энергии, которую токовый слой выигрывает при слипании его токовых нитей в центральной области ( $z \sim 0$ ).

Для того, чтобы оценить для каких токовых слоёв возможно развитие тиринг неустойчивости в присутствии захваченных частиц, обратимся к рисунку 6.

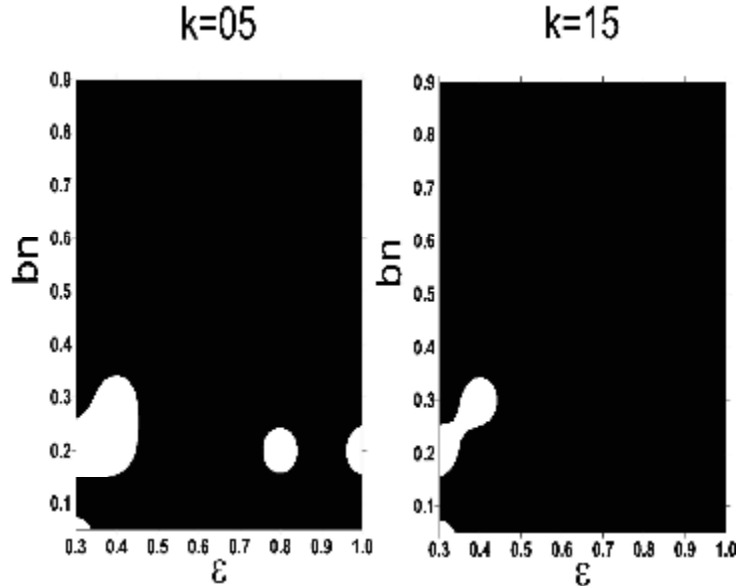


Рис.6. Области тиринг неустойчивости (белый) в пространстве параметров  $e \times b_n$  для различных значений коэффициента  $k$  и всех длин волн из диапазона  $b_n < 2pr_i/l < 2$ .

Из рисунка видно, что при увеличении количества захваченных частиц уменьшается область тиринг неустойчивости. Это вызвано тем, что для больших значений коэффициента  $k$  уменьшается центральный градиент тока  $F(z) = \partial j_y / \partial A_0$  и вместе с ним, уменьшается свободная энергия тиринг неустойчивости. Этот эффект не столь существенен, так как тиринг неустойчивость в основном развивается в тонких токовых слоях ( $e \ll 1$ ), а для таких токовых слоёв профиль тока не сильно подвержен изменению с ростом коэффициента  $k$ . Но при переходе от токового слоя без захваченных частиц ( $k = 0$ ) к токовому слою с ненулевым значением коэффициента  $k$  разница в областях присутствия тиринг неустойчивости существенна. Для того, чтобы в этом убедиться, вернёмся к рисунку 3, на котором представлена такая же параметрическая область существования тиринг неустойчивости, что и на рисунке 4, но для токовых слоёв без захваченных частиц ( $k = 0$ ).

### Выводы

В данной работе исследуется вопрос существования тиринг неустойчивости для модели анизотропного тонкого токового слоя. Было показано, что при использовании полного энергетического соотношения с учётом резонансного взаимодействия частиц с волной возмущения в пространстве параметров  $e \times b_n$  существуют области с отрицательными значениями суммарной энергии  $dW < 0$ . Это означает, что для таких токовых слоёв энергия, выигрываемая от слипания токовых нитей, превосходит энергию, которую необходимо затратить на возмущение магнитного поля и изменение траекторий частиц. Для таких токовых слоёв возможно развитие тиринг неустойчивости.

При этом было показано, что развитие тиринг неустойчивости наиболее вероятно для тонких токовых слоёв ( $e \ll 1$ ). Область значений нормальной компоненты магнитного поля для токовых слоёв с  $dW < 0$  находится в пределах  $0.05 < b_n < 0.4$ .

Сама возможность существования тиринг неустойчивости обеспечена наличием сильных градиентов плотности тока в центре ТС. Данное обстоятельство позволяет говорить о ином, нежели у токового слоя Харриса, распределении скоростей частиц по пространству. То есть, если для токового слоя Харриса выполнялось соотношение

$j_y(z)/n_0(z) = const$ , то для рассматриваемой модели анизотропного ТТС  
 $\max_{-L < z < L} j_y(z)/n_0(z) = j_y(0)/n_0(0)$ .

Проведя исследование возможности развития тиринг неустойчивости в токовых слоях с захваченными частицами, можно сделать следующие выводы. Для тонких токовых слоёв ( $e \ll 1$ ) появление популяции захваченных частиц не столь существенно влияет на возможность развития тиринг неустойчивости, как для токовых слоёв с толщиной  $L \sim r_i$ . Но в любом случае, наличие захваченных частиц препятствует развитию тиринг неустойчивости за счёт уменьшения градиента плотности тока в центре токового слоя.

### Список литературы

1. Harris E.G. On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic fields // Nuovo Chimento. 1962. Vol. 23. P. 115-119.
2. Laval G., Pellat R., Vuillemin M. Instabilités électromagnétiques des plasmas sans collisions in: Plasma Physics and Controlled Fusion Research. 1966. Vol. II. P. 259-276. International Atomic Energy Agency. Vienna.
3. Pellat R., Coroniti F.V., Pritchett P.L. Does ion tearing exist? // Geophys. Res. Lett. 1991. Vol. 18. P. 143-146.
4. Schindler K., Pfirsch D., Wöbig H. Stability of two-dimensional collision-free plasmas // Plasma Physics. 1973. Vol. 15. P. 1165-1184.
5. Sitnov M.I., Zelenyi L.M., Malova H.V., Sharma A.S. Thin current sheet embedded within a thicker plasma sheet: self-consistent kinetic theory // J. Geophys. Res. 2000. V.105. N A6. P. 13029-13044.
6. Zelenyi L.M., Delcourt D.C., Malova H.V., Sharma A.S. 2002. "Aging" of the magnetotail thin current sheets // Geophys. Res. Lett. Vol. 29. N 12. P. 49-1 – 49-4.
7. Zelenyi L.M., Malova H.V., Popov V.Yu., Delcourt D., Sharma A.S. Nonlinear equilibrium structure of thin currents sheets: influence of electron pressure anisotropy // Nonlinear Processes in Geophysics. 2004. Vol. 11. P. 1-9.