

МОДЕЛЬ КОНВЕКЦИИ В СФЕРИЧЕСКОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ© 2009 г. *Г.М. Водинчар, Б.М. Шевцов*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

Построена математическая модель конвекции во вращающемся сферическом слое вязкой жидкости (внешнем ядре Земли) в приближении Буссинеска. При выводе уравнений поле температуры разложено по собственным функциям оператора Лапласа в слое, а поле скоростей представлено композицией тороидальных и полоидальных компонент, для которых в качестве производящих использовались те же функции. Осуществлена селекция мод, которые могут описать крупномасштабную структуру конвекции, сопоставимую с данными о структуре ядра. Получена система уравнений для амплитуд компонент температуры и скорости.

MODEL OF CONVECTION IN A ROTATING SPHERICAL LAYER*G.M. Vodinchar, B.M. Shevtsov*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS

The model of convection in a rotating spherical layer of a viscous liquid (an external Earth's Core) in Boussinesq approximation is constructed. In equation producing, the field of temperature is expanded on eigen functions of Laplas operator in the layer. The field of speeds is presented by decomposition of toroidal and poloidal components, for which as producing the same functions were used. The selection of modes that can describe the large-scale convection structure comparing with data of the Earth Core is realized. The system of the equations for amplitudes of components of temperature and speed is obtained.

Введение

В настоящее время существует множество моделей генерации геомагнитного поля. Общепринятыми являются различные варианты магнитного динамо [1-6]. Существуют и альтернативные подходы [7-8]. Однако во всех механизмах генерации геомагнитного поля определяющую роль играют конвективные процессы во внешнем ядре Земли.

В настоящей работе построена модель конвекции в сферическом слое вязкой жидкости путем усечения галеркинских разложений [9] гидродинамических уравнений. Обсуждаются те компоненты разложения, которые могут описать крупномасштабную структуру конвекции, сопоставимую с данными о структуре ядра [10-11]. При этом рассматривается только гидродинамика процесса без учета магнитных полей и электрических токов.

Уравнения конвекции

Рассмотрим конвекцию вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, вращающемся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси $\theta=0$ в сферических координатах (r, θ, φ) . Направляющий орт этой оси будем обозначать как e_z . Для описания конвекции используем уравнения Навье-Стокса, теплопроводности и неразрывности в приближении Буссинеска [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= \nu\Delta\mathbf{V} - \frac{1}{\rho_0}\nabla P - \beta T\mathbf{g} - 2(\Omega \times \mathbf{V}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T &= k\Delta T, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0,$$

где \mathbf{V} – поле скорости, P – давление, ν – кинематическая вязкость, ρ_0 – средняя плотность в слое, β – коэффициент объемного расширения, k – коэффициент теплопроводности, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ – вектор угловой скорости, $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_r$, где g – среднее в слое ускорение свободного падения, \mathbf{e}_r – радиальный орт. Поля давления P и температуры T представляют собой отклонения от средних значений, соответствующих гидростатическому равновесию и стационарному потоку тепла.

Систему (1) дополняем граничными условиями для температуры и условиями проскальзывания для скорости на внутренней и внешней границах слоя:

$$T|_{r=r_1} = T_1, \quad T|_{r=r_2} = T_2, \quad V_r|_{r=r_1} = V_r|_{r=r_2} = 0,$$

где r_1 – внутренний радиус, а r_2 – внешний радиус слоя ($r_1=1391$ км и $r_2=3486$ км [13]). Температуру на границах будем считать постоянной. Использование краевых условий проскальзывания вместо обычных для вязкой жидкости условий прилипания допустимо, если пренебрегать эффектами на границах внешнего ядра с F -слоем и мантией.

Для записи в безразмерном виде системы (1) используем в качестве единиц измерения (характерных масштабов): по длине – толщину слоя $h=r_2-r_1$, по температуре – разность температур на границах слоя $\delta T=T_1-T_2$, по времени – характерное время вязкой диссипации $t_0=h^2/\nu$. За единицу измерения давления примем $\rho_0 \nu^2/h^2$. Получим систему в безразмерных переменных (обозначения переменных сохранены)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= \Delta \mathbf{V} - \nabla P + G T \mathbf{e}_r - \tau(\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T &= \frac{1}{\sigma} \Delta T, \\ \nabla \mathbf{V} = 0, \quad T|_{r=r_1} &= T_1, \quad T|_{r=r_2} = T_2, \quad V_r|_{r=r_1} = V_r|_{r=r_2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь управляющими параметрами модели являются число Грассхофа $G=\delta T g h^3 \beta / \nu^2$, число Прандтля $\sigma=\nu/k$, число Кориолиса $\tau=2h^2 \Omega / \nu = 4\pi t_0 / T_0$, где $T_0=2\pi/\Omega$ – период вращения слоя. После масштабирования на толщину слоя h получим безразмерные $r_1=0.664$ и $r_2=1.664$.

Перейдем в системе (2) к однородным граничным условиям для температуры, введя отклонение \tilde{T} температуры от линейного по радиусу профиля. Поскольку в новых переменных $r_2=r_1+1$ и $T_2=T_1-1$, то получим $T(r, \theta, \varphi) = -r + r_1 + T_1 + \tilde{T}(r, \theta, \varphi)$. Затем возьмем ротор от обеих частей первого уравнения для исключения поля давления, учитывая, что $(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = (1/2) \text{grad } \mathbf{V}^2 - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}$. Получим систему (тильда опущена для упрощения записи)

$$\begin{aligned} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}) &= \text{rot } \Delta \mathbf{V} + G \text{rot}(T \mathbf{e}_r) - \tau \text{rot}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T - V_r &= \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{2}{r} + \Delta T \right), \\ \nabla \mathbf{V} = 0, \quad T|_{r=r_1} &= T|_{r=r_2} = 0, \quad V_r|_{r=r_1} = V_r|_{r=r_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания пространственной структуры конвекции выполним разложение полей скорости и температуры. Поле температуры будем раскладывать по системе собственных функций оператора Лапласа в слое. Поле скоростей разложим на тороидальные и полоидальные моды, где в качестве производящих функций также будем использовать собственные функции оператора Лапласа.

Собственные функции оператора Лапласа в слое

Найдем собственные функции оператора Лапласа в рассматриваемой области с однородными граничными условиями $T|_{r=r_1} = T|_{r=r_2} = 0$. Разделение переменных в уравнении $\Delta T + \mu T = 0$ дает собственные функции в виде $R_n(r)Y_n^m(\theta, \varphi)$, $n = 0, 1, \dots$, $m = -n, \dots, n$, где $Y_n^m(\theta, \varphi)$ – нормированные сферические гармоники, а радиальные функции

$$R_n(r) = A_n \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\mu}r)}{\sqrt{r}} + B_n \frac{J_{-n-1/2}(\sqrt{\mu}r)}{\sqrt{r}}$$

выражаются через функции Бесселя первого рода полуцелого индекса $\pm(n+1/2)$ [14]. Здесь A_n и B_n – произвольные константы. Использование краевых условий $R_n(r_1) = R_n(r_2) = 0$ дает уравнение на собственные значения:

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\mu}r_1) \cdot J_{-n-1/2}(\sqrt{\mu}r_2) - J_{n+1/2}(\sqrt{\mu}r_2) \cdot J_{-n-1/2}(\sqrt{\mu}r_1) = 0. \tag{4}$$

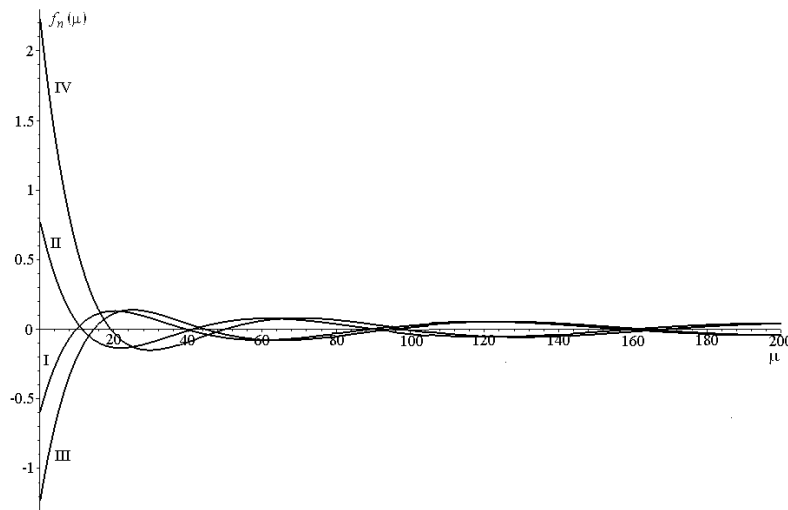


Рис.1. Графики уравнений на собственные значения I – ($n=0$), II – ($n=1$), III – ($n=2$), IV – ($n=3$)

Для каждого n это уравнение имеет счетное семейство положительных решений (собственных значений) μ_{kn} . Уравнение решалось численно для $n=0, \dots, 10$. При каждом таком n определялись 11 первых корней, соответствующих $k=0, \dots, 10$. Предварительно корни отделялись графически. Графики левой части $f_n(\mu)$ уравнения (4) для $n=1, 2, 3$ приведены на рис.1. Для нескольких низших собственных мод найденные собственные значения приведены в табл.1.

Таким образом, система радиальных функций имеет вид

$$R_{kn}(r) = A_{kn} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\sqrt{\mu_{kn}}r) + B_{kn} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{-n-1/2}(\sqrt{\mu_{kn}}r),$$

где $A_{kn} = J_{-n-1/2}(\sqrt{\mu_{kn}}r_1)$ и $B_{kn} = -J_{n+1/2}(\sqrt{\mu_{kn}}r_1)$. Эти функции ортогональны при фиксированном n и различных k на отрезке $[r_1; r_2]$ с весом r^2 . Количество нулей функции $R_{kn}(r)$ внутри отрезка $[r_1; r_2]$ равно k . Для удобства нормируем $R_{kn}(r)$ и получим ортонормальную при фиксированном n систему функций. Графики нескольких таких функций приведены на рис.2. Коэффициенты A_{kn} и B_{kn} с учетом нормирующего множителя приведены в табл.1.

Таблица 1. Собственные значения оператора Лапласа μ_{kn} и нормированные коэффициенты A_{kn} , B_{kn} низших радиальных мод.

k	n	μ_{kn}	A_{kn}	B_{kn}
0	0	9.870	-1.548	-2.734
1	0	39.478	-2.286	3.810
2	0	88.826	5.440	0.137
3	0	157.914	-2.958	-5.544
4	0	246.740	-3.764	5.931
0	1	11.455	-1.451	-2.817
1	1	41.220	4.340	-0.966
2	1	90.605	-1.050	5.340
3	1	159.706	-4.980	-3.832
4	1	248.538	6.379	-2.943
0	2	14.573	2.772	-1.665
1	2	44.709	-1.736	-4.102
2	2	94.170	-4.413	3.187
3	2	163.296	5.235	3.477
4	2	252.140	1.171	-6.927
0	3	19.124	-3.238	-0.841
1	3	49.953	-1.294	-4.277
2	3	99.539	5.179	-1.688
3	3	168.698	0.631	6.253
4	3	257.555	-6.847	-1.574
0	4	24.983	3.482	-0.398
1	4	56.944	3.154	-3.200
2	4	106.735	-2.596	-4.792
3	4	175.932	-5.410	3.200
4	4	264.797	4.758	5.170

Разложение скорости и температуры

Выполним разложения полей скорости и температуры на моды, характеризующие структуру конвекции на разных пространственных масштабах. Для упрощения записи будем использовать одноиндексные обозначения. Представим поля скорости и температуры в виде

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \mathbf{V}_i \quad \text{и} \quad T = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t) T_j, \quad (5)$$

где \mathbf{V}_i – поля вида ${}_k \mathbf{T}_n^m = \text{rot}(R_{kn} Y_n^m \mathbf{e}_r)$ (тороидальные моды) и/или ${}_k \mathbf{P}_n^m = \text{rotrot}(R_{kn} Y_n^m \mathbf{e}_r)$ (полоидальные моды), а T_j – функции вида $R_{kn} Y_n^m$. Радиальная проекция тороидальных мод нулевая, а для полоидальных она равна

$$-\frac{R_{kn}}{r^2} \left(\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \varphi^2} \right).$$

Поскольку $R_{kn}(r_1) = R_{kn}(r_2) = 0$, подобное представление скорости автоматически обеспечит граничные условия проскальзывания. Граничные условия для температуры также будут обеспечены разложением. Относительно интегрирования по сфере фиксированного радиуса ортогональны любое тороидальное и любое полоидальное поля, а также и однотипные поля, отличаю-

щиеся какими-либо сферическими индексами [15]. Очевидно, такие поля будут ортогональны и относительно интегрирования по объему сферического слоя.

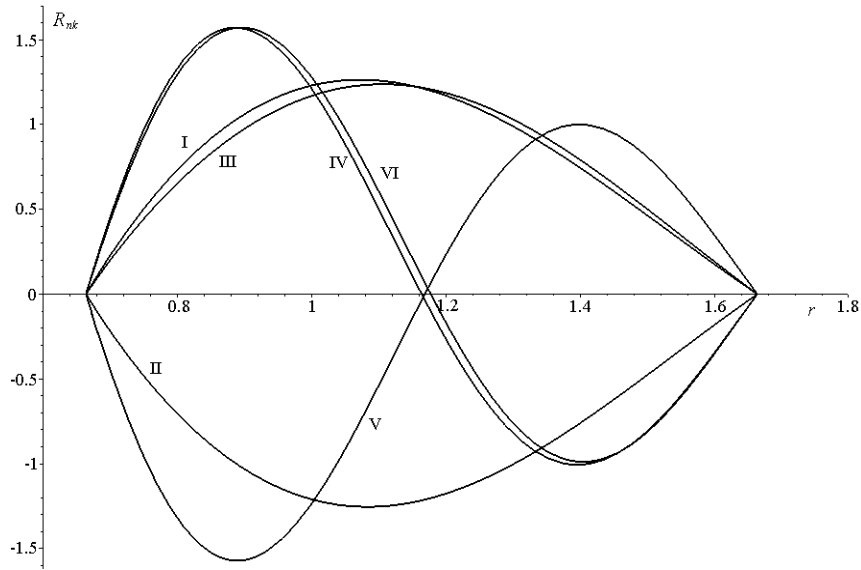


Рис.2. Графики низших радиальных мод: I – R_{00} , II – R_{01} , III – R_{02} , IV – R_{10} , V – R_{11} , VI – R_{12}

Отметим, что у тороидальных мод, отличающихся только индексом k , линии тока геометрически совпадают, различие проявляется в разных скоростях и направлениях течений. Это вид-

но из разложения этих компонент по локальному сферическому базису ${}_k\mathbf{T}_n^m = \frac{R_{kn}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \frac{R_{kn}}{r} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$. Такие моды, не имеющие радиальной составляющей, не обеспечивают конвекцию

как таковую. Скорее всего, в модели они отвечают за кориолисов снос. На рис. 3 изображены несколько линий тока полоидальных мод ${}_0\mathbf{P}_2^1$, ${}_1\mathbf{P}_2^1$ и ${}_2\mathbf{P}_2^1$. Видно, что индекс k отвечает за число линий $(k+1)$, расположенных друг над другом.

Для изучения структуры течений необходимо оставить в разложении (5) для скорости небольшое число наиболее важных мод, отражающих характерные черты движения жидкости в ядре Земли. В связи с этим отметим следующее. В [10] проанализированы результаты ряда работ по распределению по глубине splitting-функций собственных колебаний Земли. Имеющая максимум на глубинах внешнего ядра splitting-функция сфероидальной моды собственных колебаний ${}_{11}S_4$ дает 12 областей. В 6 из них плотность вещества выше средней, а в 6 других ниже средней (рис.4). В качестве возможной интерпретации этого автор работы [10] предлагает 12-ячеистую конвекцию, где в 6 областях вещество «тонет», а в 6 «всплывает». Такая конвекция естественным образом связывается с тессеральной сферической гармоникой, имеющей 12-ячеистую структуру максимумов и минимумов.

В нашей модели за перенос вещества в радиальном направлении отвечают радиальные проекции полоидальных мод. Крупномасштабная вертикальная структура конвекции описывается компонентами ${}_0\mathbf{P}_n^m$, которые могут обеспечить перенос вещества от нижней границы слоя к

верхней. Поскольку их радиальные проекции равны $-\frac{R_{0n}}{r^2} \left(\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \varphi^2} \right)$ и функции $R_{0n}(r)$ сохраняют знак на отрезке $[r_1; r_2]$, радиальные направления течений компонент ${}_0\mathbf{P}_n^m$ не зависят от r . Построение карт радиальных проекций ${}_0\mathbf{P}_n^m$ в плоскости (θ, φ) для $n=1, 2, \dots, 10$ показало, что искомой 12-ячейистой структурой обладают моды ${}_0\mathbf{P}_4^{\pm 2}$ (рис.5). На этом же рисунке изображены линии тока моды ${}_0\mathbf{P}_4^2$.

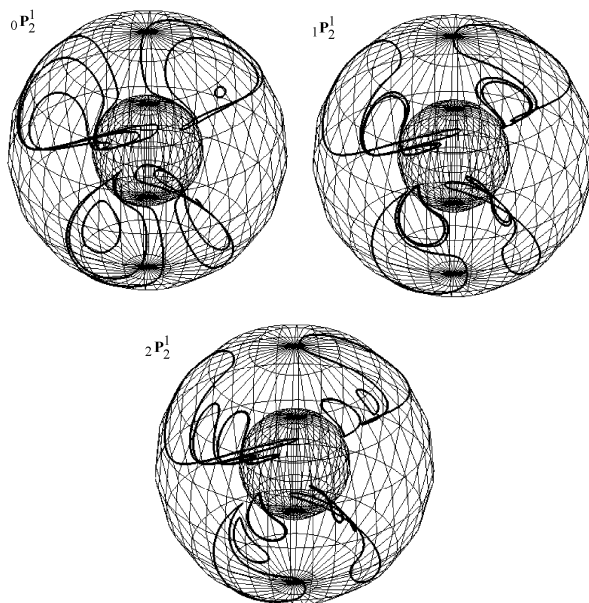


Рис.3. Линии тока полоидальных мод ${}_0\mathbf{P}_2^1$, ${}_1\mathbf{P}_2^1$, ${}_2\mathbf{P}_2^1$.

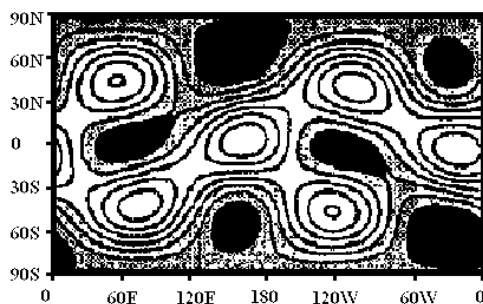


Рис.4. Портрет splitting-функции для моды 11S4 собственных колебаний Земли из [10]. Черный цвет – плотность вещества на 0,2% выше средней, белый – плотность на 0,2% ниже средней.

Таким образом, можно предположить, что основная крупномасштабная конвекция обеспечивается модами ${}_0\mathbf{P}_4^{\pm 2}$, точнее говоря, их линейной комбинацией. Варьируя коэффициенты этой комбинации, можно получить необходимый фазовый сдвиг по φ .

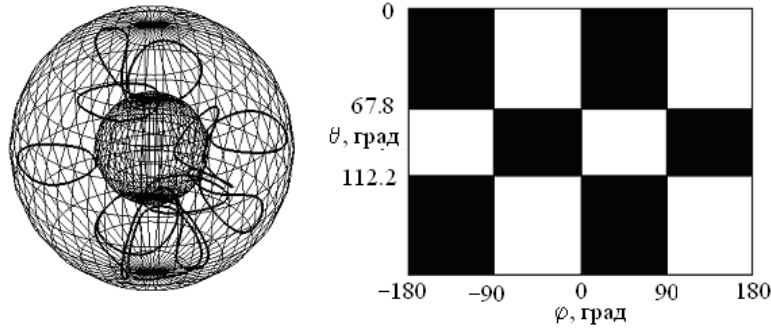


Рис.5. Линии тока моды ${}_0P_4^2$ (слева) и ее радиальная компонента (справа). Черный цвет – течение снизу вверх, белый – наоборот.

Динамическая система для амплитуд температуры и скорости

Будем считать, что в рядах (5) оставлено N членов для скорости и M членов для температуры. Подставив разложение в первое уравнение системы (3), получим

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \text{rot } \mathbf{V}_i - \alpha_i \alpha_j \text{rot}(\mathbf{V}_i \times \text{rot } \mathbf{V}_j) \right) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \text{rot } \Delta \mathbf{V}_i - \tau \alpha_i \text{rot}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}_i)) + G \sum_{j=1}^M \beta_j \text{rot}(T_j \mathbf{e}_r).$$

Умножим полученное уравнение скалярно на $\text{rot } \mathbf{V}_k$ и проинтегрируем по объему слоя. В результате получится система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^N A_i^k \frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^N B_{ij}^k \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^N C_i^k \alpha_i + G \sum_{j=1}^M D_j^k \beta_j + \tau \sum_{i=1}^N E_i^k \alpha_i \quad k=1, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь

$$A_i^k = \int \text{rot } \mathbf{V}_k \text{rot } \mathbf{V}_i dV, \quad B_{ij}^k = \int \text{rot } \mathbf{V}_k \text{rot}(\mathbf{V}_i \times \text{rot } \mathbf{V}_j) dV, \quad C_i^k = \int \text{rot } \mathbf{V}_k \text{rot } \Delta \mathbf{V}_i dV,$$

$$D_j^k = \int \text{rot } \mathbf{V}_k \text{rot}(T_j \mathbf{e}_r) dV, \quad E_i^k = -\int \text{rot } \mathbf{V}_k \text{rot}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i) dV.$$

Все они несложно могут быть вычислены, причем интегрирование по θ и ϕ проводится аналитически, а по r – численно.

Поскольку в результате применения операции ротора полоидальные и тороидальные поля взаимно переходят друг в друга [15], то ортогональны роторы мод разных типов, а также однотипных мод, отличающихся какими-либо сферическими индексами. Таким образом, матрица \mathbf{A} сильно разрежена вне главной диагонали. Предполагая ее обратимость, умножим систему (6) на обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} и получим динамическую систему для амплитуд компонент скорости

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \sum_{i,j=1}^N \bar{B}_{ij}^k \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^N \bar{C}_i^k \alpha_i + G \sum_{j=1}^M \bar{D}_j^k \beta_j + \tau \sum_{i=1}^N \bar{E}_i^k \alpha_i \quad k=1, \dots, N. \quad (7)$$

Аналогичным образом поступим со вторым уравнением системы (3). Подставив разложение для скорости и температуры, умножив почленно на T_s и проинтегрировав по слою, получим систему

$$\frac{d\beta_s}{dt} = \sum_{i,j=1}^{N,M} F_{ij}^s \alpha_i \beta_j + \sum_{i=1}^N H_i^s \alpha_i + \frac{1}{\sigma} (I^s - \mu_s \beta_s) \quad s=1, \dots, M. \quad (8)$$

Здесь $F_{ij}^s = -\int T_s (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) T_j dV$, $H_i^s = \int T_s V_{ir} dV$, $I^s = -\int \frac{2T_s}{r} dV$, μ_s – собственное значение температурной моды T_s .

Объединяя системы (7)-(8), получим замкнутую динамическую систему для амплитуд компонент температуры и скорости

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \sum_{i,j=1}^N \bar{B}_{ij}^k \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^N \bar{C}_i^k \alpha_i + G \sum_{j=1}^M \bar{D}_j^k \beta_j + \tau \sum_{i=1}^N \bar{E}_i^k \alpha_i \quad k=1, \dots, N,$$

$$\frac{d\beta_s}{dt} = \sum_{i,j=1}^{N,M} F_{ij}^s \alpha_i \beta_j + \sum_{i=1}^N H_i^s \alpha_i + \frac{1}{\sigma} (I^s - \mu_s \beta_s) \quad s=1, \dots, M.$$

Выводы

В работе получена модель конвекции во вращающемся сферическом слое вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Эта модель может быть использована для описания конвекции во внешнем ядре Земли без учета магнитных полей и электрических токов. Гидродинамические токи разложены на полоидальные и тороидальные компоненты, что позволяет осуществлять селекцию мод и изучать структуру конвекции на разных пространственных масштабах. Определены полоидальные компоненты, описывающие крупномасштабную картину конвекции. Получена квадратично-нелинейная динамическая система для амплитуд компонент скорости и температуры, являющаяся аналогом классической системы Лоренца [9,12] маломодовой конвекции. Эта система содержит три управляющих параметра, в которые входит кинематическая вязкость земного ядра – один из наименее известных физических параметров Земли. Имеющиеся в литературе оценки расходятся на 15 порядков и лежат в диапазоне $10^{-7} \div 10^7$ м²/с [3, 11]. Систему (8) можно численно решать, варьируя набор мод, параметры G , σ , τ и начальные условия. Это позволит моделировать конвективный процесс при различных предположениях о величине вязкости и таких параметрах ядра как δT , β и k , для которых нет надежных оценок.

Проведено выделение двух основных мод, которые могут описать крупномасштабную структуру конвекции, согласующуюся с имеющимися данными о структуре ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рикитаци Т. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли. – Л.: Недра, 1968, 331 с.
2. Яновский Б.М. Земной магнетизм. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978, 591 с.
3. Джекобс Дж. Земное ядро. – М.: Мир, 1979, 305 с.
4. Паркинсон У. Введение в геомагнетизм. – М.: Мир, 1986, 525 с.
5. Reshetnyak M., Steffen B. Dynamo model in the spherical shell // Numerical Methods and Programming, 2005, v.6, p.27-32.
6. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006, 384 с.
7. Inglis D.R. Theories of the Earth's magnetism // Rev. Mod. Phys., 1955, v.27, №2, p.212-248.
8. Григорьев В.И., Григорьева Е.В., Ростовский В.С. Бароэлектрический эффект и электромагнитные поля планет и звезд. – М.: Физматлит, 2003, 192 с.
9. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981, 366 с.
10. Кузнецов В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // УФН, 1997, т.167, №9, с.1002-1012.
11. Молоденский С.М. Приливы, нутация и внутреннее строение Земли. – М.: Наука, 1984, 215 с.
12. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеиздат, 1988, 422 с.
13. Козенко А.В. Земля // Физическая энциклопедия, т.2. – М.: Советская энциклопедия, 1990, с.78-80.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977, 735 с.
15. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. – NY: Dover Publ. Inc., 1981, 654 p.

Поступила в редакцию 12.03.08