

Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости*

Г. М. ВОДИНЧАР, Б. М. ШЕВЦОВ

Учреждение Российской академии наук

Институт космических исследований и распространения радиоволн

ДВО РАН, п. Паратунка Камчатского края

e-mail: gvodinchar@yandex.ru, bshev@ikir.kamchatka.ru

Построена маломодовая модель конвекции в приближении Буссинеска. Поля скорости и температуры разложены по собственным полям (модам) оператора Лапласа. Отобраны моды, которые могут описать крупномасштабную структуру конвекции во внешнем ядре Земли, согласующуюся с данными о ядре. Показано, что в модели невозможен режим стационарной конвекции.

Ключевые слова: конвекция, вращающаяся жидкость, тороидальные и полоидальные поля, ядро Земли.

Введение

Конвективные процессы во вращающихся шаровых оболочках — основные формы движения жидкостей и газов в астро- и геофизических объектах — играют важнейшую роль в генерации магнитных полей планет и звезд [1–4].

В настоящей работе построена модель конвекции в шаровом слое вязкой жидкости путем усечения галеркинских разложений [2, 5] гидродинамических уравнений. При этом рассматривается только гидродинамика процесса, без учета магнитных полей и электрических токов. Модель применена для описания конвекции в жидком ядре Земли. Обсуждаются те компоненты разложения, которые могут описать крупномасштабную структуру конвекции, согласующуюся с данными о структуре ядра [6–9].

1. Уравнения конвекции

Рассмотрим шаровой слой D вязкой жидкости толщиной h , вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси с направляющим ортом \mathbf{e}_z . Будем использовать сферическую систему координат с началом в центре O слоя, совместив ось вращения слоя с осью $\theta = 0$. Температуру на внутренней и внешней границах слоя считаем постоянной, причем на внутренней границе она выше, чем на внешней. Ускорение свободного падения постоянно по величине и равно $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$, где \mathbf{e}_r — радиальный орт.

Используем в качестве единиц измерения (характерных масштабов): по длине — толщину слоя h , по температуре — разность температур на границах слоя δT , по времени —

*Работа выполнена по программе фундаментальных исследований Президиума РАН. 2008. № 16. ч. 3.
© ИВТ СО РАН, 2009.

характерное время вязкой диссипации $t_0 = h^2/\nu$, где ν — коэффициент кинематической вязкости. За единицу давления примем $\rho_0\nu^2/h^2$, где ρ_0 — средняя плотность в слое.

Уравнения конвекции в приближении Обербека—Буссинеска запишем в принятой в работах по геодинамо инвариантной форме [10, 11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= \Delta\mathbf{v} - \nabla p + \text{Ra Pr}^{-1}T\mathbf{e}_r - \tau(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T &= \text{Pr}^{-1}\Delta T, \\ \nabla\mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{v} , T и p — возмущения полей скорости, температуры и давления соответственно. Управляющими параметрами модели являются: число Рэлея $\text{Ra} = \delta T g h^3 \beta / (\nu k)$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu/k$, число Кориолиса $\tau = 2h^2\Omega/\nu = 4\pi t_0/T_0$. Здесь β — коэффициент объемного расширения, k — коэффициент теплопроводности, $T_0 = 2\pi/\Omega$ — период вращения слоя.

Систему (1) дополняем граничными условиями для температуры и условиями прилипания для скорости на внутренней и внешней границах слоя:

$$T|_{r=r_1} = T_1, \quad T|_{r=r_2} = T_1 - 1, \quad \mathbf{v}|_{r=r_1} = \mathbf{v}|_{r=r_2} = 0,$$

где r_1 — внутренний радиус, а $r_2 = r_1 + 1$ — внешний радиус слоя.

Перейдем в системе (1) к однородным граничным условиям для температуры, введя отклонение Θ температуры от линейного по радиусу профиля, и получим выражение $T(\mathbf{r}) = -r + r_1 + T_1 + \Theta(\mathbf{r})$. Затем возьмем ротор от обеих частей первого уравнения для исключения поля давления, учитывая, что $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = (1/2)\text{grad } \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$. Получим систему

$$\begin{aligned} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{rot } (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) &= \text{rot } \Delta\mathbf{v} + \text{Ra Pr}^{-1}\text{rot } (\Theta\mathbf{e}_r) - \tau\text{rot } (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Theta - (\mathbf{v}\nabla)r &= \text{Pr}^{-1}\left(-\frac{2}{r} + \Delta\Theta\right), \\ \nabla\mathbf{v} &= 0, \\ \Theta|_{r=r_1} = \Theta|_{r=r_2} &= 0, \quad \mathbf{v}|_{r=r_1} = \mathbf{v}|_{r=r_2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Следуя идее метода Галеркина, далее разложим поля температуры и скорости на базисные моды с нестационарными амплитудами [2, 5].

2. Разложение полей скорости и температуры

Будем использовать сферическую систему координат с началом в точке O , совместив ось вращения слоя с осью $\theta = 0$.

Рассмотрим пространство H_1 скалярных полей в слое D со скалярным произведением $\langle \Phi, \Psi \rangle_1 = \int_D \Phi\Psi d\omega$ (интегрирование ведется по объему слоя), удовлетворяющих условию $\Phi|_{\partial D} = 0$. Для разложения температуры используем собственные поля оператора Лапласа в пространстве H_1 . Их можно представить в виде

$$\Theta_{nm} = R_n(r, \lambda) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = -n, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь $Y_n^m(\theta, \varphi)$ — нормированные сферические гармоники, радиальные функции $R_n(r, \lambda) = A_n j_n(\sqrt{-\lambda}r) + B_n y_n(\sqrt{-\lambda}r)$, где $j_n(\cdot)$ и $y_n(\cdot)$ — сферические функции Бесселя первого и второго родов, а $\lambda < 0$ — собственные значения [12]. Выделяя поля, удовлетворяющие граничному условию $\Theta_{nm}|_{\partial D} = 0$, получим уравнение на собственные значения:

$$j_n(\sqrt{-\lambda}r_1) y_n(\sqrt{-\lambda}r_2) - j_n(\sqrt{-\lambda}r_2) y_n(\sqrt{-\lambda}r_1) = 0, \quad (4)$$

которое для каждого n имеет счетное семейство отрицательных решений λ_{kn} .

Таким образом, система собственных полей имеет вид ${}_k\Theta_n^m = R_{kn}(r) Y_n^m(\theta, \varphi)$, $k = 0, 1, \dots$, $n = 0, 1, \dots$, $m = -n, \dots, n$, где $R_{kn}(r) = A_{kn} j_n(\sqrt{-\lambda_{kn}r}) + B_{kn} y_n(\sqrt{-\lambda_{kn}r})$. Эта система ортогональна относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, причем каждому собственному значению λ_{kn} соответствуют $2n+1$ собственное поле при $m = -n, \dots, n$. В дальнейшем будем считать, что коэффициенты A_{kn} и B_{kn} выбраны так, что функции R_{kn} нормированы на отрезке $[r_1; r_2]$ с весом r^2 . Тогда система полей ${}_k\Theta_n^m$ ортонормальна.

Получаем разложение температуры в системе (1):

$$\Theta = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k \alpha_n^m(t) {}_k\Theta_n^m. \quad (5)$$

Для разложения скорости введем пространство $H_2 = \{\mathbf{u} | \nabla \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\partial D} = 0\}$ со скалярным умножением $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = \int_D \mathbf{u} \mathbf{v} d\omega$. Это пространство разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $H_T \oplus H_P$, где H_T и H_P — пространства тороидальных и полоидальных полей соответственно [1]. Тороидальное поле определим как $\mathbf{T}_\Phi = \text{rot}(\Phi \mathbf{r})$, а полоидальное — как $\mathbf{P}_\Psi = \text{rot rot}(\Psi \mathbf{r})$, где \mathbf{r} — радиус-вектор. При этом [1]

$$\text{rot } \mathbf{T}_\Phi = \mathbf{P}_\Phi, \quad \text{rot } \mathbf{P}_\Psi = \mathbf{T}_{-\Delta\Psi}, \quad \Delta \mathbf{T}_\Phi = \mathbf{T}_{\Delta\Phi}, \quad \Delta \mathbf{P}_\Psi = \mathbf{P}_{\Delta\Psi}. \quad (6)$$

Таким образом, H_T и H_P — инвариантные подпространства оператора Лапласа. Тогда естественно пытаться использовать для разложения скорости собственные поля оператора Лапласа в подпространствах H_T и H_P отдельно.

Для того чтобы поля \mathbf{T}_Φ и \mathbf{P}_Ψ были собственными для векторного оператора Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы их производящие функции Φ и Ψ были собственными для скалярного оператора Лапласа с теми же собственными значениями.

Рассмотрим тороидальные собственные поля:

$$\text{rot}(R_{kn} Y_n^m \mathbf{r}) = R_{kn} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta - R_{kn} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi = R_{kn} \frac{m}{\sin \theta} Y_n^{-m} \mathbf{e}_\theta - R_{kn} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7)$$

Поскольку функции R_{kn} нулевые на границах слоя, то поля (7) принадлежат пространству H_2 . Введем для них обозначение ${}_k\mathbf{T}_n^m$.

Будем использовать далее разложение скалярного оператора Лапласа на радиальную и угловую части: $\Delta = \Delta_r + (1/r^2) \Delta_s$, где

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \Delta_s = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

При этом известно, что $\Delta_s Y_n^m = -n(n+1) Y_n^m$.

Полоидальные собственные поля оператора Лапласа

$$\begin{aligned} \text{rot rot} (R_{kn} Y_n^m \mathbf{r}) &= \\ &= -\frac{R_{kn}}{r} \Delta_s Y_n^m \mathbf{e}_r + \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \frac{R_{kn}}{r} n(n+1) Y_n^m \mathbf{e}_r + \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \frac{m}{\sin \theta} Y_n^m \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (8)$$

не принадлежат пространству H_2 , поскольку функции R_{kn} не удовлетворяют граничному условию

$$\left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right)_{r=r_1, r_2} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, среди собственных полей оператора Лапласа в пространстве H_2 нет полоидальных, и использовать их для разложения в H_P невозможно.

Для выбора полоидальных мод скорости заметим, что оператор Лапласа входит в первое уравнение системы (1) в комбинации $\text{rot } \Delta$ и поля ${}_k \mathbf{T}_n^m$ удовлетворяют соотношению $\text{rot } \Delta_k \mathbf{T}_n^m = \lambda_{kn} \text{rot } {}_k \mathbf{T}_n^m$. Тогда полоидальные компоненты скорости естественно искать как решения спектральной задачи

$$\text{rot } \Delta \mathbf{P}_\Psi = \mu \text{rot } \mathbf{P}_\Psi \quad (10)$$

в пространстве H_2 .

Покажем, что поле \mathbf{P}_Ψ является решением задачи (10) тогда и только тогда, когда функция Ψ является решением задачи

$$\Delta^2 \Psi = \mu \Delta \Psi. \quad (11)$$

Действительно, пусть Ψ удовлетворяет равенству (11). Отметим, что для соленоидальных полей $\Delta = -\text{rot}^2$. Тогда, с учетом (6), получим $\text{rot } \Delta \mathbf{P}_\Psi = \text{rot } \mathbf{P}_{\Delta \Psi} = \mathbf{T}_{-\Delta(\Delta \Psi)} = \mathbf{T}_{-\mu \Delta \Psi} = -\mu \mathbf{T}_{\Delta \Psi} = -\mu \Delta \mathbf{T}_\Psi = \mu \text{rot}^2 \mathbf{T}_\Psi = \mu \text{rot } \mathbf{P}_\Psi$.

Пусть теперь \mathbf{P}_Ψ удовлетворяет (10). Тогда $\text{rot } \mathbf{P}_{\Delta \Psi - \mu \Psi} = 0$. В то же время $\text{rot } \mathbf{P}_{\Delta \Psi - \mu \Psi} = \text{rot rot } \mathbf{T}_{\Delta \Psi - \mu \Psi} = -\Delta \mathbf{T}_{\Delta \Psi - \mu \Psi} = -\mathbf{T}_{\Delta(\Delta \Psi - \mu \Psi)} = -\text{rot} ((\Delta^2 \Psi - \mu \Delta \Psi) \mathbf{r})$. Получаем, что $(\Delta^2 \Psi - \mu \Delta \Psi) \mathbf{r} = \nabla U$, где U — произвольное скалярное поле. При этом видно, что U зависит только от радиальной координаты и

$$\Delta^2 \Psi - \mu \Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr}. \quad (12)$$

Общее решение неоднородного уравнения (12) представим в виде общего решения Ψ_0 однородного уравнения $\Delta^2 \Psi - \mu \Delta \Psi = 0$ и частного решения Ψ^* уравнения (12), которое можно выбрать зависящим только от r . Таким образом, $\Psi = \Psi_0 + \Psi^*(r)$, но очевидно, что $\mathbf{P}_\Psi = \mathbf{P}_{\Psi_0 + \Psi^*}$, поэтому можно считать, что $\Psi = \Psi_0$, т.е. Ψ удовлетворяет (11).

Решения задачи (11) имеют вид: $R_n^P(r, \lambda) Y_n^m(\theta, \varphi)$, $n = 0, 1, \dots$, $m = -n, \dots, n$, где [13]

$$R_n^P = C_n^1 j_n(\sqrt{-\mu} r) + C_n^2 y_n(\sqrt{-\mu} r) + C_n^3 r^n + C_n^4 r^{-(n+1)}. \quad (13)$$

Из формулы (8) получаем краевые условия для функции R_n^P :

$$R_n^P(r_1) = 0, \quad R_n^P(r_2) = 0, \quad \left. \frac{dR_n^P}{dr} \right|_{r=r_1} = 0, \quad \left. \frac{dR_n^P}{dr} \right|_{r=r_2} = 0, \quad (14)$$

образующие однородную линейную систему уравнений относительно коэффициентов C_n^i . Эта система имеет ненулевые решения при условии

$$\begin{vmatrix} j_n(\sqrt{-\mu r_1}) & y_n(\sqrt{-\mu r_1}) & r_1^n & r_1^{-(n+1)} \\ j_n(\sqrt{-\mu r_2}) & y_n(\sqrt{-\mu r_2}) & r_2^n & r_2^{-(n+1)} \\ \left. \frac{d}{dr} j_n(\sqrt{-\mu r}) \right|_{r=r_1} & \left. \frac{d}{dr} y_n(\sqrt{-\mu r}) \right|_{r=r_1} & nr_1^{n-1} & -(n+1)r_1^{-(n+2)} \\ \left. \frac{d}{dr} j_n(\sqrt{-\mu r}) \right|_{r=r_2} & \left. \frac{d}{dr} y_n(\sqrt{-\mu r}) \right|_{r=r_2} & nr_2^{n-1} & -(n+1)r_2^{-(n+2)} \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

дающем уравнение на собственные значения. Это уравнение для каждого n имеет счетное семейство отрицательных решений μ_{kn} , нумеруемых индексом k начиная с нуля. Подставляя затем μ_{kn} вместо μ в систему (14), находим коэффициенты C_{kn}^i для собственных функций R_{kn}^P . Далее будем считать, что в этих коэффициентах учтен нормирующий множитель аналогично коэффициентам в R_{kn} для температуры и тороидальных полей. Итак, для разложения скорости в H_P будем использовать поля $\text{rot rot}(R_{kn}^P Y_n^m \mathbf{r})$, обозначаемые далее ${}_k \mathbf{P}_n^m$.

Объединяя компоненты разложения в пространствах H_T и H_P , получим представление скорости в системе (1)

$$\mathbf{v} = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n ({}_k \beta_n^m(t) {}_k \mathbf{T}_n^m + {}_k \gamma_n^m(t) {}_k \mathbf{P}_n^m). \quad (16)$$

Подставив разложения (5) и (16) в первое и второе уравнения системы (1), получим систему уравнений для амплитуд ${}_k \alpha_n^m(t)$, ${}_k \beta_n^m(t)$, ${}_k \gamma_n^m(t)$. Граничные условия и уравнение неразрывности будут обеспечены самим разложением. Отметим, что ортогональны не только тороидальные и полоидальные поля между собой, но и однотипные поля, отличающиеся какими-либо сферическими индексами.

У тороидальных мод, отличающихся только индексом k , линии тока геометрически совпадают, различие проявляется в разных скоростях и направлениях течений. Это видно из разложения (7) этих компонент по локальному базису. Такие моды, не имеющие радиальной составляющей, вообще не обеспечивают конвекцию. Скорее всего в модели они отвечают за кориолисов снос.

3. Динамическая система для амплитуд температуры и скорости

Будем считать, что в разложениях (5) и (16) оставлены какие-либо N членов для скорости и M членов для температуры. Для упрощения записей используем одноиндексные обозначения

$$\Theta = \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \Theta_j, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \mathbf{v}_i, \quad (17)$$

где \mathbf{v}_i — поля вида ${}_k \mathbf{T}_n^m$ и/или ${}_k \mathbf{P}_n^m$, Θ_j — поля вида ${}_k \Theta_n^m$, $\alpha_j(t)$ и $\beta_i(t)$ — соответствующие амплитуды. Подставив эти разложения в первое уравнение системы (1), получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\beta_i}{dt} \text{rot } \mathbf{v}_i = \sum_{i,j=1}^N \beta_i \beta_j \text{rot}(\mathbf{v}_i \times \text{rot } \mathbf{v}_j) + \sum_{i=1}^N \beta_i \mu_i \text{rot } \mathbf{v}_i +$$

$$+ \text{Ra Pr}^{-1} \sum_{j=1}^M \alpha_j \text{rot} (T_j \mathbf{e}_r) - \tau \sum_{i=1}^N \beta_i \text{rot} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i), \quad (18)$$

где μ_i — это собственное значение моды \mathbf{v}_i .

Умножим полученное уравнение (18) скалярно на компоненту завихренности $\text{rot} \mathbf{v}_k$ и проинтегрируем по объему слоя. Выполняя это для различных k , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^N A_i^k \frac{d\beta_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^N B_{ij}^k \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^N \mu_i A_i^k \beta_i + \text{Ra Pr}^{-1} \sum_{j=1}^M D_j^k \alpha_j + \tau \sum_{i=1}^N E_i^k \beta_i, \quad k = 1 \dots N. \quad (19)$$

Здесь $A_i^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} \mathbf{v}_i \rangle_2$, $B_{ij}^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} (\mathbf{v}_i \times \text{rot} \mathbf{v}_j) \rangle_2$, $D_j^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} \Theta_j \mathbf{e}_r \rangle_2$, $E_i^k = -\langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i) \rangle_2$. Все эти скалярные произведения несложно могут быть вычислены при заданных радиусах слоя D , причем интегрирование по θ и φ проводится аналитически, а по r — численно.

С учетом вышеуказанных соотношений ортогональности для мод завихренности матрица \mathbf{A} сильно разрежена вне главной диагонали. Предполагая ее обратимость, умножим систему (19) на обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} и получим динамическую систему для амплитуд компонент скорости:

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \sum_{i,j=1}^N \bar{B}_{ij}^k \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^N \mu_i \beta_i + \text{Ra Pr}^{-1} \sum_{j=1}^M \bar{D}_j^k \alpha_j + \tau \sum_{i=1}^N \bar{E}_i^k \beta_i, \quad k = 1 \dots N. \quad (20)$$

Подставив разложение для скорости и температуры во второе уравнение системы (1), умножив почленно на Θ_s и проинтегрировав по слою, получим систему

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \sum_{i,j=1}^{N,M} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=1}^N H_i^s \beta_i + \text{Pr}^{-1} (I^s + \lambda_s \alpha_s), \quad s = 1 \dots M. \quad (21)$$

Здесь $F_{ij}^s = -\langle \Theta_s, (\mathbf{v}_i \nabla) \Theta_j \rangle_1$, $H_i^s = \langle \Theta_s, \mathbf{v}_{ir} \rangle$, $I^s = -\langle \Theta_s, 2/r \rangle_1$, λ_s — собственное значение температурной моды Θ_s .

Объединяя системы (20) и (21), получим замкнутую динамическую систему для амплитуд компонент температуры и скорости:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_k}{dt} &= \sum_{i,j=1}^N \bar{B}_{ij}^k \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^N \lambda_i \beta_i + \text{Ra Pr}^{-1} \sum_{j=1}^M \bar{D}_j^k \alpha_j + \tau \sum_{i=1}^N \bar{E}_i^k \beta_i, \quad k = 1 \dots N, \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{N,M} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=1}^N H_i^s \beta_i + \text{Pr}^{-1} (I^s + \lambda_s \alpha_s), \quad s = 1 \dots M. \end{aligned} \quad (22)$$

При выборе мод температуры и скорости в разложениях (17), кроме физических соображений, надо учитывать, что многие из коэффициентов системы (22) могут оказаться нулевыми. Если не принимать это во внимание, то из системы могут исчезнуть физически важные члены. Так, если все коэффициенты $E_i^k = 0$, то исчезает кориолисов член, т. е. теряется информация о вращении слоя. Если все $D_j^k = 0$, пропадает число Рэлея, содержащее основные физические параметры слоя. К исчезновению гидродинамической нелинейности приводит равенство нулю всех коэффициентов B_{ij}^k и F_{ij}^s . Таким образом, не должны быть полностью нулевыми матрицы E_i^k и D_j^k , а также оба массива B_{ij}^k и F_{ij}^s .

4. Конвекция в жидком ядре Земли

Применим рассмотренную модель для описания крупномасштабной конвекции в жидком ядре Земли, пренебрегая его проводимостью и дифференциальным вращением внутреннего ядра. У жидкого ядра $r_1 = 1391$ км и $r_2 = 3486$ км, т. е. $h = 2095$ км [9]. Тогда безразмерные $r_1 = 0.664$ и $r_2 = 1.664$.

Уравнение (4) решалось численно для $n = 0, \dots, 10$, а уравнение (15) — для $n = 1, \dots, 10$. При каждом таком n определялись 11 первых корней уравнений, соответствующих $k = 0, \dots, 10$. Предварительно корни отделялись графически. Найденные собственные значения λ_{kn} и μ_{kn} для нескольких низших мод температуры и скорости приведены в таблице.

На рис. 1 и 2 приведены графики нескольких радиальных функций $R_{kn}(r)$ и $R_{kn}^P(r)$ соответственно. Видно, что индекс k равен числу нулей функции внутри отрезка $[r_1; r_2]$.

На рис. 3 изображены несколько линий тока полоидальных мод ${}_0\mathbf{P}_3^2$, ${}_1\mathbf{P}_1^1$ и ${}_2\mathbf{P}_2^1$. Видно, что индекс k соответствует числу линий $(k+1)$, расположенных друг над другом.

Оставим в разложении (17) для скорости моды, отражающие характерные черты движения жидкости в ядре Земли, известные по данным наблюдений. В [6] проанализированы результаты ряда работ по распределению по глубине splitting-функций собственных колебаний Земли. Имеющая максимум на глубинах внешнего ядра splitting-функция сфероидальной моды собственных колебаний ${}_{11}S_4$ дает 12 областей. В шести

Собственные значения компонент температуры и скорости

| k | n | λ_{kn} | μ_{kn} |
|-----|-----|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | -9, 8696044010893586188 | — |
| 1 | 0 | -39, 478417604357434475 | — |
| 2 | 0 | -88, 826439609804227570 | — |
| 3 | 0 | -157, 91367041742973790 | — |
| 4 | 0 | -246, 74011002723396547 | — |
| 0 | 1 | -11, 455033134142749864 | -38, 075147418695209057 |
| 1 | 1 | -41, 219754268073013367 | -81, 223365350294919345 |
| 2 | 1 | -90, 604584355210226459 | -156, 51998443665601732 |
| 3 | 1 | -159, 70550740406327457 | -239, 18054557535862006 |
| 4 | 1 | -48, 53843939295002972 | -353, 91379393950900647 |
| 0 | 2 | -14, 572638397647346606 | -36, 799344517235429183 |
| 1 | 2 | -44, 709185001509418657 | -82, 408073214774901134 |
| 2 | 2 | -94, 169928226108868868 | -155, 38531057169492076 |
| 3 | 2 | -163, 29593636082305466 | -240, 36767426569833768 |
| 4 | 2 | -252, 13998293473545468 | -352, 80364379213322178 |
| 0 | 3 | -19, 124182167488560428 | -37, 178684354127621538 |
| 1 | 3 | -49, 953157609504853354 | -84, 687302622568106189 |
| 2 | 3 | -99, 539433622402301062 | -155, 88308926984687364 |
| 3 | 3 | -168, 69831014448673504 | -242, 62778958826604838 |
| 4 | 3 | -257, 55451138120985648 | -353, 31565374005247297 |
| 0 | 4 | -24, 982958261151985468 | -39, 867570352259379156 |
| 1 | 4 | -56, 944257920355348944 | -88, 414875292654741893 |
| 2 | 4 | -106, 73522997909339802 | -158, 49789806819266478 |
| 3 | 4 | -175, 93216974699327099 | -246, 27311073091802174 |
| 4 | 4 | -264, 79666461286846322 | -355, 89268966307817916 |

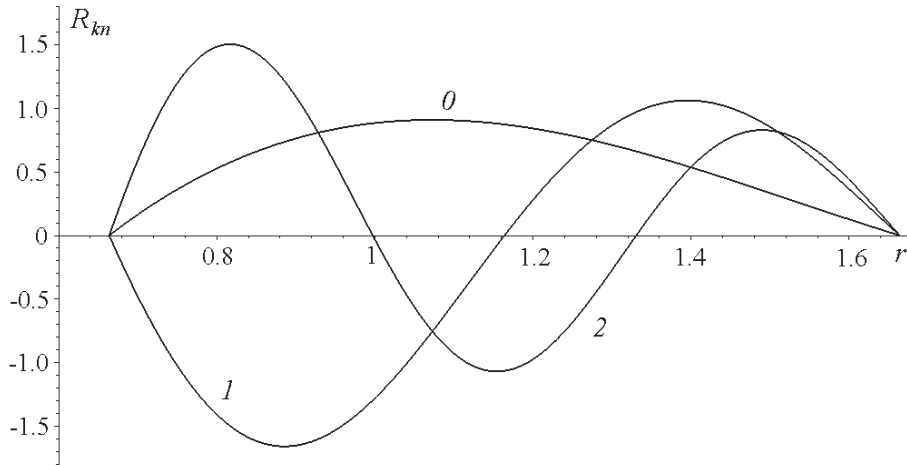


Рис. 1. Графики радиальных функций R_{kn} тороидальных мод скорости и температуры: 0 — R_{00} ; 1 — R_{10} ; 2 — R_{20}

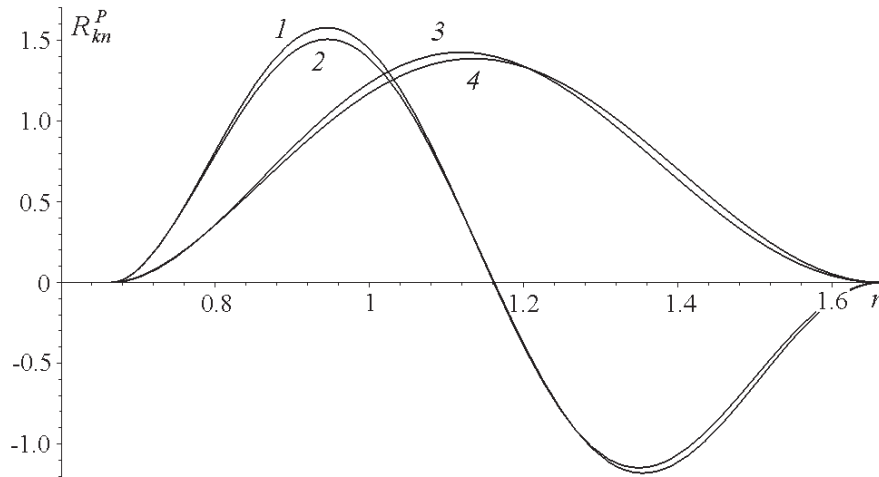


Рис. 2. Графики радиальных функций R_{kn}^P полоидальных мод скорости: 1 — R_{11}^P ; 2 — R_{14}^P ; 3 — R_{01}^P ; 4 — R_{04}^P

из них плотность вещества выше средней, а в шести других — ниже средней (рис. 4). В качестве возможной интерпретации этого автор работы [6] предлагает 12-ячеистую конвекцию, где в шести областях вещество “тонет”, а в шести — “всплывает”. Такая конвекция естественным образом связывается с тессеральной сферической гармоникой, имеющей 12-ячеистую структуру максимумов и минимумов.

В нашей модели за перенос вещества в радиальном направлении отвечают радиальные проекции полоидальных мод. Крупномасштабная вертикальная структура конвекции описывается компонентами ${}_0\mathbf{P}_n^m$, которые могут обеспечить перенос вещества от нижней границы слоя к верхней. Построение карт радиальных проекций ${}_0\mathbf{P}_n^m$ в плоскости (θ, φ) для $n = 1, 2, \dots, 10$ показало, что искомой 12-ячеистой структурой обладают моды ${}_0\mathbf{P}_4^{\pm 2}$ (рис. 5). На этом же рисунке изображены линии тока моды ${}_0\mathbf{P}_4^2$.

Предположим, что крупномасштабная конвекция обеспечивается модами ${}_0\mathbf{P}_4^{\pm 2}$, точнее говоря, их линейной комбинацией. Варьируя коэффициенты этой комбинации, можно получить необходимый фазовый сдвиг по φ .

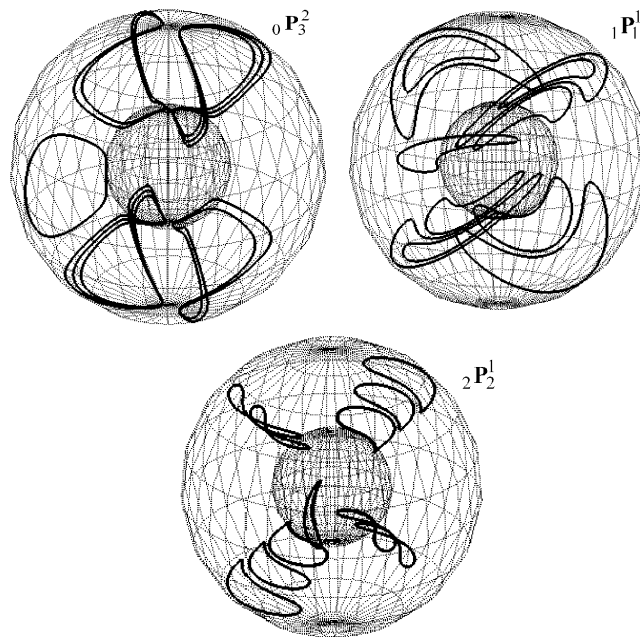


Рис. 3. Линии тока полоидальных мод ${}_0P_3^2$, ${}_1P_1^1$, ${}_2P_2^1$

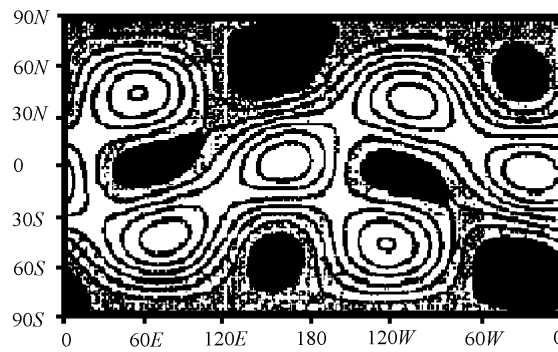


Рис. 4. Портрет splitting-функции для моды ${}_{11}S_4$ собственных колебаний Земли из работы [6]: черный цвет — плотность вещества на 0.2% выше средней, белый — плотность на 0.2% ниже средней

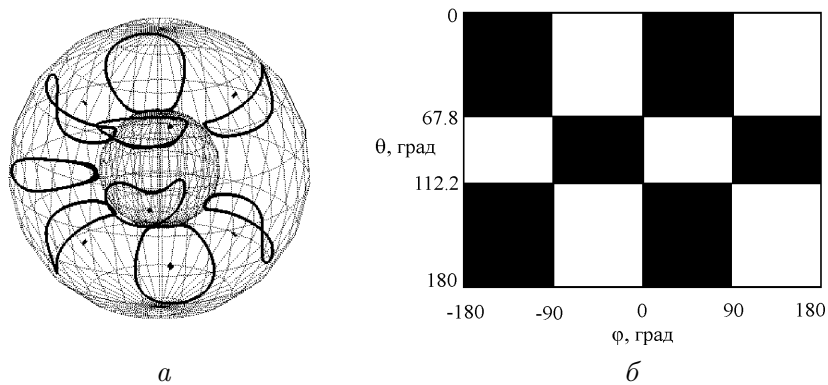


Рис. 5. Линии тока моды ${}_0P_4^2$ (а) и ее радиальная компонента (б): черный цвет — течение снизу вверх, белый — наоборот

Таким образом, в разложении (17) оставляем две моды скорости: $\mathbf{v}_1 = {}_0\mathbf{P}_4^{-2}$, $\mathbf{v}_2 = {}_0\mathbf{P}_4^2$. По аналогии с параметризацией, используемой при составлении системы Лоренца, для температуры возьмем три моды, обозначив $\Theta_0 = {}_0\Theta_0^0$, $\Theta_1 = {}_0\Theta_4^{-2}$, $\Theta_2 = {}_0\Theta_4^2$. Компоненты Θ_1 и Θ_2 обеспечат разницу температур восходящих и нисходящих потоков, Θ_0 дает среднее отклонение температуры от линейного по радиусу профиля.

Рассмотрим коэффициенты систем (19) и (21) для отобранных мод. Непосредственное аналитическое интегрирование по θ и φ дало следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 A_1^1 = A_2^2 &= 20 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \left[-40r^2 R_{04}^P \frac{d^2 R_{04}^P}{dr^2} + \left(2r \frac{dR_{04}^P}{dr} \right)^2 + 4r^3 \frac{dR_{04}^P}{dr} \frac{d^2 R_{04}^P}{dr^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(r^2 \frac{d^2 R_{04}^P}{dr^2} \right)^2 - 80r R_{04}^P \frac{dR_{04}^P}{dr} + 400 (R_{04}^P)^2 \right] dr, \\
 D_1^1 = D_2^2 &= -20 \int_{r_1}^{r_2} \frac{R_{04}}{r} \left(r^2 \frac{d^2 R_{04}^P}{dr^2} + 2r \frac{dR_{04}^P}{dr} - 20R_{04}^P \right) dr, \\
 E_2^1 &= -E_1^2 = A_1^1/10,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$F_{11}^0 = F_{22}^0 = -\frac{10}{\sqrt{\pi}} \int_{r_1}^{r_2} R_{00} \left(R_{04} R_{04}^P + r \frac{d}{dr} (R_{04} R_{04}^P) \right) dr,$$

$$H_1^1 = H_2^2 = 20 \int_{r_1}^{r_2} r R_{04} R_{04}^P dr,$$

$$I^0 = -4\sqrt{\pi} \int_{r_1}^{r_2} r R_{00} dr.$$

Остальные коэффициенты равны нулю. Отметим также, что поля \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 имеют одно и то же собственное значение $\mu = -39.8675703523$, поля Θ_1 и Θ_2 — собственное значение $\lambda = -24.9829582612$, поле Θ_0 — собственное значение $\lambda_0 = -9.8696044011$.

Система (22) в рассматриваемом случае примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\beta_1}{dt} &= \mu\beta_1 + \text{Ra Pr}^{-1} (D_1^1/A_1^1) \alpha_1 + \frac{\tau}{10}\beta_2, \\
 \frac{d\beta_2}{dt} &= \mu\beta_2 + \text{Ra Pr}^{-1} (D_1^1/A_1^1) \alpha_2 - \frac{\tau}{10}\beta_1, \\
 \frac{d\alpha_0}{dt} &= F_{11}^0 (\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2) + \text{Pr}^{-1} (I^0 + \lambda_0\alpha_0), \\
 \frac{d\alpha_1}{dt} &= F_{10}^1\beta_1\alpha_0 + H_1^1\beta_1 + \text{Pr}^{-1}\lambda\alpha_1, \\
 \frac{d\alpha_2}{dt} &= F_{10}^1\beta_2\alpha_0 + H_1^1\beta_2 + \text{Pr}^{-1}\lambda\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Выражение для дивергенции поля скоростей в фазовом пространстве этой системы имеет вид $2\mu + \text{Pr}^{-1}(\lambda_0 + 2\lambda)$. Оно очевидно отрицательно, т. е. все фазовые траектории сходятся к предельному многообразию, размерность которого меньше 5.

Найдем точки покоя системы (24), т. е. решения системы:

$$\begin{aligned}\mu\beta_1 + \text{Ra Pr}^{-1} (D_1^1/A_1^1) \alpha_1 + \frac{\tau}{10}\beta_2 &= 0, \\ \mu\beta_2 + \text{Ra Pr}^{-1} (D_1^1/A_1^1) \alpha_2 - \frac{\tau}{10}\beta_1 &= 0, \\ F_{11}^0 (\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2) + \text{Pr}^{-1} (I^0 + \lambda_0\alpha_0) &= 0, \\ F_{10}^1\beta_1\alpha_0 + H_1^1\beta_1 + \text{Pr}^{-1}\lambda\alpha_1 &= 0, \\ F_{10}^1\beta_2\alpha_0 + H_1^1\beta_2 + \text{Pr}^{-1}\lambda\alpha_2 &= 0.\end{aligned}\tag{25}$$

Из первых двух уравнений получим

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{10\text{Ra Pr}^{-1}D_1^1(10\mu\alpha_1 - \tau\alpha_2)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)}, \\ \beta_2 &= -\frac{10\text{Ra Pr}^{-1}D_1^1(10\mu\alpha_2 + \tau\alpha_1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)}.\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в четвертое и пятое уравнения системы (25), получим однородную линейную систему уравнений относительно α_1 и α_2 с основной матрицей:

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{100\text{Ra}D_1^1\mu(F_{10}^1\alpha_0 + H_1^1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)} & \frac{10\text{Ra}D_1^1\tau(F_{10}^1\alpha_0 + H_1^1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)} \\ -\frac{10\text{Ra}D_1^1\tau(F_{10}^1\alpha_0 + H_1^1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)} & \lambda - \frac{100\text{Ra}D_1^1\mu(F_{10}^1\alpha_0 + H_1^1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)} \end{bmatrix}.$$

Эта система может иметь ненулевые решения только в том случае, если одновременно

$$\lambda - \frac{100\text{Ra}D_1^1\mu(F_{10}^1\alpha_0 + H_1^1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)} = 0, \quad \frac{10\text{Ra}D_1^1\tau(F_{10}^1\alpha_0 + H_1^1)}{A_1^1(100\mu^2 + \tau^2)} = 0,$$

но эти равенства очевидно несовместны. Таким образом, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, значит, и $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Теперь из третьего уравнения системы (25) получим $\alpha_0 = -I^0/\lambda_0$.

Итак, при любых значениях управляющих параметров система (24) имеет одну точку покоя, соответствующую отсутствию конвекции ($\mathbf{v} = 0$). То, что у системы нет точек покоя с ненулевыми амплитудами компонент скорости, означает, что в данной модели невозможен режим стационарной конвекции.

Рассмотрим вопрос об устойчивости найденной точки. Линеаризуем систему (24) в окрестности точки покоя:

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_1}{dt} &= \mu\beta_1 + \text{Ra Pr}^{-1} (D_1^1/A_1^1) \alpha_1 + \frac{\tau}{10}\beta_2, \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= \mu\beta_2 + \text{Ra Pr}^{-1} (D_1^1/A_1^1) \alpha_2 - \frac{\tau}{10}\beta_1, \\ \frac{d\alpha_0}{dt} &= \text{Pr}^{-1}\lambda_0\alpha_0, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= (-F_{10}^1I^0/\lambda_0 + H_1^1) \beta_1 + \text{Pr}^{-1}\lambda\alpha_1, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= (-F_{10}^1I^0/\lambda_0 + H_1^1) \beta_2 + \text{Pr}^{-1}\lambda\alpha_2.\end{aligned}\tag{26}$$

Характеристический многочлен системы (26) имеет вид $(\lambda_0/\text{Pr} - z) Q(z)$, где

$$Q(z) = \begin{vmatrix} \mu - z & \tau/10 & \text{Ra Pr}^{-1} D_1^1/A_1^1 & 0 \\ -\tau/10 & \mu - z & 0 & \text{Ra Pr}^{-1} D_1^1/A_1^1 \\ H_1^1 - F_{10}^1 I^0/\lambda_0 & 0 & \text{Pr}^{-1} \lambda - z & 0 \\ 0 & H_1^1 - F_{10}^1 I^0/\lambda_0 & 0 & \text{Pr}^{-1} \lambda - z \end{vmatrix}.$$

Аналитически можно определить только одно собственное значение $z_1 = \lambda/\text{Pr} < 0$. Дальнейшее исследование устойчивости проведем численно. Вычисление интегралов по формулам (23) дает: $A_1^1 = 22139.1982314796$, $D_1^1 = 423.6650368945$, $F_{10}^1 = 3.7866074003$, $H_1^1 = 16.6933578027$, $I^0 = -6.3830764864$.

Примем следующие значения для параметров земного ядра [8, 14]: $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $k = 10^{-5}$ м²/с, $\delta T = 10^3$ К. Известно также, что $h = 2.1 \cdot 10^6$ м и $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Тогда $\text{Pr} = 10^{-1}$, $\tau = 6,4 \cdot 10^{14}$. Значение объемного расширения оставим свободным с ограничением $1 - \beta \delta T \gg 0$, т. е. $\beta \ll 2 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹.

Результаты численного исследования корней многочлена $Q(z)$ показывают, что точка покоя теряет устойчивость при превышении коэффициентом β критического значения $\beta_{cr} = 10^{-8.1}$. Соответствующее критическое значение числа Рэлея $\text{Ra}_{cr} = 10^{26}$.

Выводы

В работе изучена модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Гидродинамические токи разложены на собственные для оператора Лапласа тороидальные компоненты и собственные полоидальные компоненты задачи $\text{rot } \Delta \mathbf{P} = \mu \text{ rot } \mathbf{P}$, что позволяет осуществлять селекцию мод и изучать структуру конвекции на разных пространственных масштабах. Получена квадратично-нелинейная динамическая система для амплитуд компонент скорости и температуры, являющаяся аналогом классической системы Лоренца [2, 5] маломодовой конвекции.

Модель применена к описанию крупномасштабной картины конвекции в жидком ядре Земли. Произведен отбор полоидальных мод, описывающих такую структуру жидких токов, которая согласуется с предложенной на основе данных наблюдений в [6] гипотезой о 12-ячейковой конвекции в ядре. Показано, что такая конвекция может возникать при значениях параметров ядра, принятых в теории геодинамо. Установлено, что в полученной маломодовой модели невозможен режим стационарной конвекции.

В работе рассмотрен только один простейший вариант комбинаций мод. Представляется, что усложнение этой комбинации позволит в дальнейшем лучше описать крупномасштабную структуру конвекции.

Список литературы

- [1] CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. N.Y.: Dover Publ. Inc., 1981. 654 p.
- [2] МОНИН А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 422 с.
- [3] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006. 384 с.

- [4] Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1. 811 с.
- [5] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
- [6] Кузнецов В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // УФН. 1997. Т. 167, № 9. С. 1002–1012.
- [7] Молоденский С.М. Приливы, нутация и внутреннее строение Земли. М.: Наука, 1984. 215 с.
- [8] Джекобс Дж. Земное ядро: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 305 с.
- [9] Козенко А.В. Земля // Физическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1990. Т. 2. С. 78–80.
- [10] Harder H., Hansen U. A finite-volume solution method for thermal convection and dynamo problems in spherical shells // Geophys. J. Int. 2005. Vol. 161. P. 522–532.
- [11] Reshetnyak M., Steffen B. A dynamo model in a spherical shell // Numerical Methods and Programming. 2005. Vol. 6. P. 27–32.
- [12] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
- [13] Розенкноп Л.М., Резников Е.Л. О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли // Вычисл. сейсмология. 1998. Вып. 30. С. 121–132.
- [14] Паркинсон У. Введение в геомагнетизм. М.: Мир, 1986. 525 с.

*Поступила в редакцию 6 августа 2008 г.,
в переработанном виде — 15 февраля 2009 г.*