Об одном эволюционном уравнении для задач ударного деформирования нелинейно упругих неоднородных сред

Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.
Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Россия
ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

Свойствам ударных волн в нелинейно упругих средах посвящено большое число исследований [1–3]. Из них хорошо известно, что в общем случае механизм образования и последующего движения поверхностей сильных разрывов зависит от свойств упругой среды, от наличия в ней предварительных деформаций, от интенсивности разрыва, а также от послеударного воздействия на границе [1–3]. Скорости ударных волн и геометрия этих поверхностей за исключением простейших краевых задач тоже входят в число неизвестных величин, поэтому ряд краевых условий ставится на поверхностях с заранее неизвестным положением. Наконец, по своему типу ударные волны в твердом теле перестают быть чисто продольными или поперечными и приобретают смешанный характер [2, 3].

В качестве теоретического метода исследования обобщенных решений для задач динамики с поверхностями разрывов деформаций необходимо в первую очередь указать метод малого параметра. В частности, такой его вариант, как метод сращиваемых асимптотических разложений [4]. Анализ основного, внешнего разложения позволяет указать те пространственно-временные области, где нелинейность является доминирующим фактором. Одновременно для этих областей оказывается возможным определить нелинейное эволюционное уравнение, более простое, чем исходные уравнения задачи, но сохраняющее основные свойства нелинейного волнового процесса. Такое уравнение возникает при изучении плоских одномерных волновых процессов в нелинейно упругих средах на достаточно больших расстояниях от нагружаемой границы [5–6]. Для массивов большой протяженности дополнительным фактором, влияющим на волновой деформационный процесс, может стать неоднородность свойств среды в направлении движения ударной волны. Рассмотрим один из вариантов такой неоднородности — слабую неоднородность степенного типа.

Общая система уравнений, задающая свойства и динамику нелинейно упругой изотропной сжимаемой среды в декартовой пространственной системы координат Эйлера x_1, x_2, x_3, имееет вид

$$\begin{gathered}
v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad \rho = \rho_0 det(\delta_{ij} - u_{i,j}), \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\
\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \\
W(I_1, I_2, I_3) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 + ..., \\
I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь ρ_0 и ρ — плотность среды в свободном и текущем состояниях, u_i и v_i — компоненты векторов перемещения и скорости среды, α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, W — функция упругого потенциала, заданная рядом Тейлора в окрестности свободного состояния для случая адиабатического приближения, λ, μ, l, m, n — упругие модули среды, причем первые два — параметры Ламе. В уравнениях (1) принято суммирование по повторяющимся индексам.

Относительно констант упругой среды сделаем дополнительное предположение, считая, что они имеют слабую зависимость от координаты x_1, то есть

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \tilde{\lambda}_1 s, \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon^2 \tilde{\mu}_1 s, \quad \rho_0 = \tilde{\rho}_0 + \varepsilon^2 \tilde{\rho}_1 s, \quad l = l_0 + \varepsilon^2 \tilde{l}_1 s, \tag{2}$$
$$m = m_0 + \varepsilon^2 \tilde{m}_1 s, \quad n = n_0 + \varepsilon^2 \tilde{n}_1 s, \quad s = \frac{x_1}{C_1 T}, \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\tilde{\rho}_0}},$$

где λ_0, $\tilde{\lambda}_1$, μ_0, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\rho}_1$, l_0, $\tilde{l}_1$, m_0, $\tilde{m}_1$, n_0, $\tilde{n}_1$ — константы, C_1 — скорость продольных упругих волн в линейном приближении с исключенной неоднородностью среды, T и $C_1 T$ — характерное время и характерное расстояние, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи.

Рассмотрим нелинейно упругое предварительно недеформированное полупространство $x_1 \geq 0$. Начиная с момента $t = 0$ на его границе под действием приложенной нагрузки известны перемещения

$$u_1\Big|_{x_1 = f_0(t),\, t \geq 0} = f_0(t), \quad u_2\Big|_{x_1 = f_0(t),\, t \geq 0} = u_3\Big|_{x_1 = f_0(t),\, t \geq 0} = 0, \quad f_0'(0) > 0. \tag{3}$$

Такие перемещения границы приводят к мгновенному образованию ударной волны. Перемещения точек среды сводятся к $u_1 = u_1(x_1, t)$, $u_2 = u_3 = 0$. При этом ударная волна становится чисто продольной [2], для ее скорости получим формулу

$$G_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu} \right) \tau_1 + \ldots \right\}, \tag{4}$$

$$\tau_1 = [u_{1,1}] = -u_{1,1}^-, \quad \alpha = -\frac{7}{2}(\lambda + 2\mu) + 3(l + m + n),$$

в которой многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью по степеням интенсивности τ_1. На переднем фронте ударной волны должны быть выполнены краевые условия

$$u_1\Big|_{x_1 = \int_0^t G_1(\xi) d\xi} = 0, \quad \tau_1 = u_{1,1}^-\Big|_{x_1 = \int_0^t G_1(\xi) d\xi}. \tag{5}$$

Следствием общей системы уравнений (1), (2) будет следующее уравнение движения:

$$(\lambda + 2\mu + 2\alpha u_{1,1})\, u_{1,11} + ((\lambda + 2\mu)_{,1} + \alpha_{,1} u_{1,1})\, u_{1,1} + \ldots = \tag{6}$$
$$= \frac{\rho_0}{(1 - u_{1,1})^2} \left\{ \ddot{u}_1 (1 - 2u_{1,1}) + 2\dot{u}_{1,1} \dot{u}_1 \right\} + \ldots .$$

В безразмерных переменных $s = \dfrac{x_1}{C_1 T}$, $\quad m = \dfrac{t}{T}$, $\quad w(s, m) = \varepsilon^{-1} \dfrac{u_1(x_1, t)}{C_1 T}$, получим внешнее разложение решения задачи:

$$w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon \left\{ -\frac{\alpha_0}{4} \left(f'(\xi) \right)^2 s + f'(\xi) f_1(\xi) \right\} + \ldots, \tag{7}$$
$$\alpha_0 = -9 + 6 \frac{l_0 + m_0 + n_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \xi = m - s \geq 0,$$

где $f(\xi)$ — известная функция краевого условия на границе полупространства. В рассматриваемом случае отметим, что неоднородные свойства сказываются на внешнем решении, начиная с $w_2(s, m)$. Так как ряд (7) при $\xi \sim 1$ теряет равномерность при $s \sim \varepsilon^{-1}$, то переменными внутреннего решения выберем $n = \varepsilon s$, $\quad p = s - m$, $\quad w = w(p, n)$. Предполагая представление $w(p, n)$ рядом по степеням ε и записывая уравнение (6) в новых переменных, на нулевом шаге метода получим нелинейное уравнение

$$v_{0,n} + \left(\frac{\alpha_0}{2} v_0 + \gamma n\right) v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}, \quad \gamma = \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2}, \tag{8}$$
$$\alpha_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\mu}_1}{\lambda_0 + 2\mu_0},$$

которое назовем эволюционным уравнением для рассматриваемого баланса нелинейности и неоднородности. Оно переходит в уравнение Коула-Хопфа при $\alpha_1 = \rho_1 = 0$. Переход к этому уравнению оказался возможен только за счет изменения масштаба координаты s. В уравнении (8) видно, что тангенс угла наклона его характеристик определяется аддитивно нелинейными слагаемыми и слагаемыми, обусловленными неоднородностью. Вдоль характеристик здесь не происходит искажение исходного импульса, и общее решение задается как

$$v_0 = F_0\left(p - \frac{\alpha_0}{2} v_0 n - \frac{\gamma}{2} n^2\right), \tag{9}$$

то есть характеристики уравнения (8) в плоскости p, n — семейство парабол. Для определения положения переднего фронта продольной ударной волны из уравнения эйконала $t = \int\limits_0^{x_1} G_1^{-1}(y)dy$ в переменных p, n получим такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\alpha_0}{4} v_0(p_0(n),\, n) + \gamma n, \quad p_0(0) = 0, \tag{10}$$

где $p(n) = p_0(n) + \varepsilon p_1(n) + \ldots$ — асимптотический ряд, связывающий координаты p, n на ударной волне. Из уравнения (10) следует, что в данном случае отклонение ударной волны от характеристики определяется только нелинейным фактором.

В качестве достаточно простого конкретного примера рассмотрим граничные перемещения, для которых $f_0(t) = vt + \dfrac{at^2}{2}$. Для них граничное условие внешней краевой задачи переходит в условие

$$w(s,m)\Big|_{s=\varepsilon\left(m+\frac{Am^2}{2}\right)} = m + \frac{Am^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{v}{C_1}, \quad A = \frac{aT}{v}. \tag{11}$$

Внешнее решение нетрудно получить на основе ряда (7). В качестве внутреннего решения из общего соотношения (9) выберем следующий частный вариант:

$$v_0(p,n) = \frac{B_1 + B_2 p - \dfrac{B_2\gamma}{2} n^2}{1 + \dfrac{B_2\alpha_0 n}{2}}, \tag{12}$$

где B_1, B_2 — неизвестные константы. Тогда для функции $w_0(p,n)$ получим

$$w_0(p,n) = \frac{B_2 p^2}{2\left(1 + B_2\dfrac{\alpha_0 n}{2}\right)} + \frac{\left(B_1 - \dfrac{B_2\gamma}{2} n^2\right) p}{1 + B_2\dfrac{\alpha_0 n}{2}} + \varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция. Функцию $v_0(p,n)$ из (12) подставляем в уравнение (10) с учетом краевого условия $p_0(0) = 0$, что позволяет записать для положения ударной волны:

$$p_0(n) = \frac{2\gamma N^2}{B_2^2\alpha_0^2} - \frac{4\gamma N}{B_2^2\alpha_0^2} + \frac{B_1\sqrt{N}}{B_2} + \frac{2\gamma}{B_2^2\alpha_0^2} - \frac{B_1}{B_2}, \quad N = 1 + \frac{B_2\alpha_0 n}{2}. \tag{13}$$

В формуле (13) переход к решению для однородной среды происходит при $\gamma = 0$. Неизвестная функция $\varphi_0(n)$ должна быть определена условием (5) в переменных p, n, $w(p,n)$, то есть $w_0(p,n)\Big|_{p=p_0(n)} = 0$, поэтому окончательно получим

$$w_0(p,n) = \frac{B_2(p^2 - p_0^2(n))}{2\left(1 + B_2\dfrac{\alpha_0 n}{2}\right)} + \frac{\left(B_1 - \dfrac{B_2\gamma}{2}n^2\right)(p - p_0(n))}{1 + B_2\dfrac{\alpha_0 n}{2}},$$

где $p_0(n)$ задается уравнением (13). Сопоставление внешнего и внутреннего решений определяет неизвестные константы: $B_1 = -1$, $B_2 = A$.

Приведенные в сообщении результаты могут быть перенесены на другие задачи (например, на задачи для чисто поперечных процессов в несжимаемых средах, или на случай другой функциональной зависимости неоднородных свойств от координат пространства).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00360-а) и ДВО РАН (проект 13-III-B-03-011).

Литература

1. *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183 с.

2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. – М.: Московский лицей, 1998. – 412 с.

3. *Буренин А.А., Чернышов А.Д.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 711–717.

4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 239 с.

5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

6. *Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.* Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.

The evolution equation for the shock deformation problems of nonlinear elastic inhomogeneous mediums

Ragozina V.E., Ivanova Yu.E.

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Russia

Dynamic deformation of nonlinear elastic bodies, which is caused by the action of short-term intensive loads, leads to a complex mechanical-physical process of shock waves formation and motion. Inhomogeneity of the medium should be considered as an additional important factor in solving dynamic problems for the great length domains (particularly in seismology). In this paper we present results of the problem solution of the longitudinal shock wave in the Murnaghan medium by a small parameter method. The elastic moduli of the medium and its density have weak power type inhomogeneity in the wave direction. The joint integration of the weak nonlinearity and weak inhomogeneity factors leads to a nonlinear distortion of characteristics and the shock wave formation. The hypothesis of the single-wave approximation allows to provide an approximate solution based on the analysis of the quasi-waves evolution

equation in the frontal area of the anterior border of the deformation wave. This equation fundamentally depends on the balance between the nonlinear and inhomogeneous properties of the medium. The general solution of the evolution equation is presented. Examples of particular solutions of various boundary value problems on the basis of this decision are given.